

Fractions continues, homographies, et géodésiques du plan hyperbolique

Romain Bondil, janvier 2016

Table des matières

1	Fractions continues et homographies	2
1.1	Le développement en fraction continue d'un nombre réel	2
1.2	Les fractions continues pour elles-mêmes	2
1.2.1	L'homographie « centrale »	2
1.2.2	Décomposition explicite	3
1.2.3	En y regardant de plus près : où vivent ces homographies ?	3
1.2.4	L'action du groupe $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:	3
1.3	Restriction à $PSL_2(\mathbb{Z})$: un changement de point de vue	4
1.3.1	A priori, ce groupe ne nous suffit pas :	4
1.3.2	Pourquoi $PSL_2(\mathbb{Z})$ est-il suffisant pour l'étude des fractions continues ?	4
2	L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}	5
2.1	Rappels et complément sur l'exposé sur les isométries de \mathbb{H}	5
2.2	Domaine fondamental pour l'action de $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$	5
2.3	Un autre domaine fondamental pour le groupe modulaire :	6
2.4	Une extension "d'ordre 3" du domaine fondamental	6
2.5	Les lignes de Farey et le pavage de Farey	7
2.5.1	Les lignes de Farey qui passent par ∞ :	7
2.5.2	Comment on en déduit toutes les lignes de Farey passant par un point $x \in \mathbb{Q}$?	7
2.5.3	Le pavage de Farey	8
3	Comment voir les développement en fraction continue avec les géodésiques et le pavage de farey	9
3.1	Un dessin plutôt qu'un long discours	9
3.1.1	Les nombres ε_k	10
3.1.2	Les nombres a_k et le théorème sur le développement en fractions continues	10
3.2	Démonstration du théorème	11
4	Compréhension plus fine du pavage de Farey	14
4.1	Première construction du pavage : par génération successive	14
4.2	Une autre façon de le comprendre : version géométrique de l'addition du cancre sur les fractions	14
4.2.1	Un peu de géométrie projective :	14
4.2.2	Une addition à la Farey... non commutative	14
4.2.3	Lien entre \oplus et la construction du pavage de Farey :	15
4.3	Un exemple concret	15

Introduction

Le but de ces notes est d'expliquer comment on « voit » le développement en fraction continue d'un nombre réel x de manière très simple dans le demi-plan de Poincaré, en suivant la géodésique qui relie i à x . Ceci est expliqué au § 3. Le § 1 suit un itinéraire un peu touristique, pour introduire le lien entre fractions continues et homographies en général, mais la partie vraiment utile pour la suite est seulement le § 1.3.2. L'idée qui sous-tend le § 1 est que pour comprendre l'action d'un groupe (sur \mathbb{R} par exemple) on gagne souvent à regarder son action dans un espace de dimension plus grande... \mathbb{R}^2 ou \mathbb{H} .

Le § 2 introduit les lignes de Farey et le pavage de Farey du demi-plan de Poincaré \mathbb{H} , qui nous servira dans la description du théorème.

Le § 3 contient l'énoncé et la démonstration du résultat principal.

1 Fractions continues et homographies

1.1 Le développement en fraction continue d'un nombre réel

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'algorithme de développement en fractions continues consiste à poser, en notant E la fonction *partie entière* :

- $a_0 = E(x)$ et si x est un entier, on s'arrête.
- Sinon, on définit x_1 en posant $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$ et $a_1 = E(x_1)$.

On construit alors les deux suites (a_k) et (x_k) comme suit : si on a défini a_0, \dots, a_k et x_1, \dots, x_k :

- si x_k n'est pas un entier, on pose $x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}}$, ce qui définit x_{k+1} et on pose $a_{k+1} = E(x_{k+1})$.

Par commodité, on posera $x_0 = x$, ce qui rend la formule précédente valable pour $k = 0$.

- si x_k est un entier, on arrête l'algorithme.

A chaque étape k , on a une écriture « exacte » de x de la forme : $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{x_k}}}}}$ (E)

Et une « approximation »¹ de x par le nombre rationnel $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$, qu'on

écrit sous forme irréductible $\frac{p_k}{q_k}$. Ces différentes fractions irréductibles $(\frac{p_k}{q_k})_{k \geq 0}$ (en nombre fini si, et seulement si, x est rationnel) sont appelées les *réduites* du développement de x .

A chaque étape, le nombre réel x_k est appelé *k*-ième *quotient complet*, et le nombre entier a_k est appelé *k*-ième *quotient incomplet*.

1.2 Les fractions continues pour elles-mêmes

1.2.1 L'homographie « centrale »

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{+*})^n$, on peut poser :

$$[a_0, \dots, a_n] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad (\dagger)$$

1. ce terme demanderait une justification... prématurée à ce stade de l'exposé!

La déf. rigoureuse de ce symbole est bien sûr par récurrence avec $[a_0] = a_0$ et :

$$[a_0, \dots, a_{n+1}] := [a_0, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}]$$

Comme souvent, on gagne à penser à tout ceci en terme *d'applications*, ce qu'on peut mettre en valeur comme suit :

$$\forall x > 0, [a_0, \dots, a_n, x] := [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}] \quad (\ddagger)$$

La relation (\ddagger) met en valeur l'application $x \mapsto a_n + \frac{1}{x}$ qui est l'*homographie* $x \mapsto \frac{a_n x + 1}{x}$.

On comprend alors que $h_n : x \mapsto [a_0, \dots, a_n, x]$ est une homographie, composée d'homographies de la forme précédente.

On va expliciter cette décomposition.

1.2.2 Décomposition explicite

Rappel : En notant $\tau : (GL_2(\mathbb{R}), \times) \rightarrow (\mathcal{H}, \circ)$ l'application qui à une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, associe l'homographie $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, on sait que τ est un morphisme surjectif de groupes, de noyau le sous-groupe formé par les matrices scalaires.

Notation : On fixe une suite $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{+*})^n$. On note $\forall k \in \mathbb{N}$, $h_k : x \mapsto [a_0, \dots, a_k, x]$.

Au paragraphe précédent, on a introduit l'homographie $x \mapsto a_k + \frac{1}{x} = \frac{a_k x + 1}{x}$. Avec le morphisme τ ci-dessus, on a donc, en posant $A_k = \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, elle se note

$$\tau_{A_k} : x \mapsto a_k + \frac{1}{x},$$

Propriété (évidente!) : avec les notations précédentes : $\forall k \geq 0$, $h_k : x \mapsto [a_0, \dots, a_k, x]$ s'écrit aussi $h_k = \tau_{H_k}$ où $H_0 = A_0$ et $\forall k \geq 0$, $H_{k+1} = H_k \cdot A_{k+1}$.

En particulier : $\boxed{h_n = \tau_{A_0 \dots A_n}}$.

1.2.3 En y regardant de plus près : où vivent ces homographies ?

Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ et $\det(A) = -1$.

Donc $A \in GL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in M_2(\mathbb{Z}), \det(M) = \pm 1\}$.

En notant $PGL_2(\mathbb{Z}) = \tau(GL_2(\mathbb{Z})) \simeq GL_2(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$, toutes les homographies h_n associées à nos fractions continues vivent dans $PGL_2(\mathbb{Z})$.

Question naturelle à ce stade : engendre-t-on tout $PGL_2(\mathbb{Z})$ avec ces homographies ? On va voir plus loin que la réponse est ...

1.2.4 L'action du groupe $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$:

Définition : Soit x et y deux réels positifs. Soient $[a_0, a_1, \dots, a_r, \dots]$ et $[b_0, b_1, \dots, b_s, \dots]$ leurs développements en fraction continue. On dira que x et y ont *même développement en fraction continue à partir d'un certain rang* si, et seulement si, il existe un entier r et un entier s tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_{r+i} = b_{s+i}$.

Remarque : Un réel positif x est rationnel si, et seulement si, son développement en fraction continue est nul à partir d'un certain rang.

Comme introduction au lien qui unit développement en fraction continue et action de $PSL_2(\mathbb{Z})$, citons la :

Propriété : Deux réels positifs x et y ont même développement en fraction continue à partir d'un certain rang, si, et seulement si, il existe un $h \in PGL_2(\mathbb{Z})$ tel que $y = h(x)$.

Autrement dit : les *queues* des développements en fractions continues permettent de décrire les orbites de l'action de $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Une idée importante pour la suite : il est parfois plus aisé de comprendre un phénomène en le plongeant dans un espace *plus grand* où il se détord mieux.

Ainsi :

- On trouvera une idée d'une preuve de cette propriété dans [Bo], en considérant non pas l'action de $PGL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mais plutôt celle de $GL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{R}^2 via la géométrie affine de \mathbb{R}^2 .

- Dans ce qui suit, on va voir une autre façon de le faire en voyant $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ comme bord du plan hyperbolique \mathbb{H} . Cela nécessite cependant de changer légèrement de groupe à étudier.

1.3 Restriction à $PSL_2(\mathbb{Z})$: un changement de point de vue

Par déf. $SL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in M_2(\mathbb{Z}), \det(M) = 1\}$. Bien sûr $SL_2(\mathbb{Z}) \subset GL_2(\mathbb{Z})$ et on définit de même $PSL_2(\mathbb{Z}) = \tau(SL_2(\mathbb{Z}))$.

1.3.1 A priori, ce groupe ne nous suffit pas :

Les homographies élémentaires τ_{A_k} définies précédemment ne sont pas dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ puisque $\det(A_k) = -1$.

En revanche avec ces homographies, il est facile d'obtenir deux générateurs « bien connus » de $PSL_2(\mathbb{Z})$ à savoir $\tau(L)$ et $\tau(U)$ où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Explicitement, on notera $T_1 = \tau(U) : x \mapsto x + 1$ et $T_{-1} = \tau(L) : x \mapsto \frac{x}{x+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$.

Exercice : comment ?

Conséquence de l'exercice : Si on connaît le résultat cité sur l'engendrement de $PSL_2(\mathbb{Z})$, on a la réponse à la question posée au 1.2.4 : les homographies $\tau(A_k)$ engendrent tout le groupe $PGL_2(\mathbb{Z})$.

1.3.2 Pourquoi $PSL_2(\mathbb{Z})$ est-il suffisant pour l'étude des fractions continues ?

Pour les rationnels : il est facile de voir que tous les rationnels sont encore dans la même orbite pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ et les fractions continues donnent une écriture explicite d'une homographie qui relie 0 à un rationnel x quelconque, écrit sous la forme : $x = [a_0, \dots, a_n]$.

En effet : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $T_1^a : x \mapsto x + a$ et $T_{-1}^a : x \mapsto \frac{1}{a + \frac{1}{x}}$ car c'est l'homographie définie

par $L^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$.

On a alors facilement la :

Propriété Pour $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N}^*)^n$, on note $g_n = T_1^{a_0} \circ T_{-1}^{a_1} \circ \dots \circ T_{(-1)^n}^{a_n}$, on a, pour $n \geq 2$.

- si n est pair, $g_n(0) = [a_0, \dots, a_n]$ et $g_n(\infty) = [a_0, \dots, a_{n-1}]$
- si n est impair, $g_n(0) = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ et $g_n(\infty) = [a_0, \dots, a_n]$.

2. de ceux qui les connaissent : voir plus loin sinon pour l'engendrement de $SL_2(\mathbb{Z})$

Démonstration : par déf. $[a_0, \dots, a_k] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}$.

D'après les formules rappelées ci-dessus, on peut voir a_k comme $T_1^{a_k}(0)$ et $\frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}} = T_{-1}^{a_{k-1}}(a_k) =$

$T_{-1}^{a_{k-1}} \circ T_1^{a_k}(0)$.

• Pour k pair, on a alors bien $\frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}} = T_{(-1)^{k-1}}^{a_{k-1}} \circ T_{(-1)^k}^{a_k}(0)$ et par réc. immédiate, on a la

première formule annoncée : $[a_0, \dots, a_k] = g_k(0)$.

En outre dans ce cas $T_1(\infty) = \infty$ donne $T_{-1}^{a_{k-1}} \circ T_1^{a_k}(\infty) = T_{-1}^{a_{k-1}}(\infty) = \frac{1}{a_{k-1}}$.

• Le cas où k est impair se fait symétriquement. □

Scholie : l'avantage, pour la suite, de $PSL_2(\mathbb{Z})$ outre le fait qu'il est plus petit et donc algébriquement plus simple (avec ses deux générateurs T_1 et T_{-1}) est qu'on peut le faire agir sur le demi-plan supérieur et voir cette action en dimension deux à l'aide de la géométrie hyperbolique.

2 L'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H}

2.1 Rappels et complément sur l'exposé sur les isométries de \mathbb{H}

Pour tout $A \in GL_2(\mathbb{R})^+$ i.e. $A \in GL_2(\mathbb{R})$ et $\det(M) > 0$, on a $\tau_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ et les τ_A sont des isométries de $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

On note encore $\tau : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$.

Comme $\tau_{\lambda A} = \tau_A$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\tau(GL_2(\mathbb{R})^+) = \tau(SL_2(\mathbb{R})) = PSL_2(\mathbb{R})$.

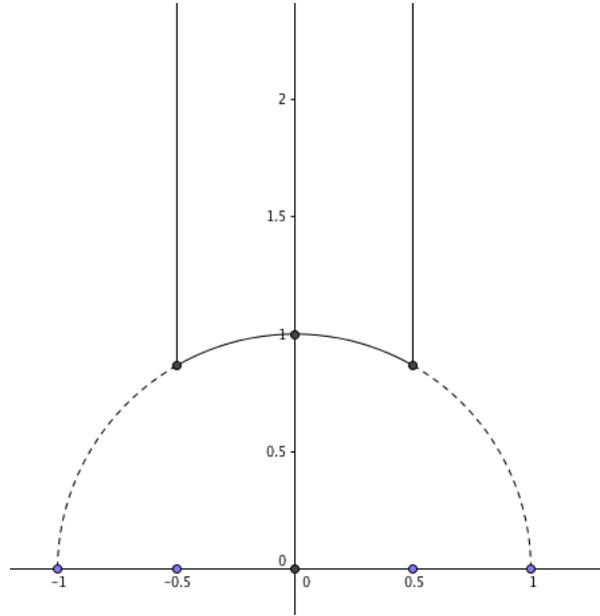
2.2 Domaine fondamental pour l'action de $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$

Définition des domaines fondamentaux : si G est un groupe agissant sur \mathbb{H} , on dit qu'un domaine fondamental pour G dans \mathbb{H} est un ensemble fermé F d'intérieur non vide tel que :

- (i) $\bigcup_{T \in G} T(F) = \mathbb{H}$,
- (ii) $\forall T \in G \setminus \{\text{id}\}, \overset{\circ}{F} \cap T(\overset{\circ}{F}) = \emptyset$.

Propriété : Un domaine fondamental pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} est le domaine de Dirichlet :

$$D = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1, -1/2 \leq \text{Re}(z) \leq 1/2\}.$$



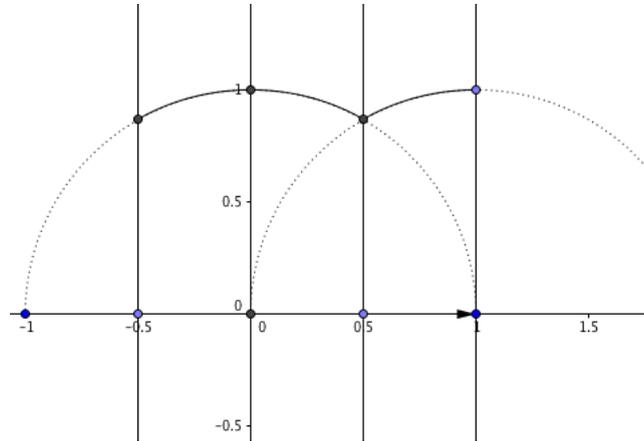
2.3 Un autre domaine fondamental pour le groupe modulaire :

Au lieu du domaine de Dirichlet usuel $D = \{z \in \mathbb{H}, -1/2 \leq z \leq 1/2, |z| \geq 1\}$ pour $PSL_2(\mathbb{Z})$, on peut considérer le domaine construit comme suit à partir de D .

On note $D^- = D \cap \{z \in \mathbb{H}, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ et $D^+ = D \cap \{z \in \mathbb{H}, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$.

Eh bien on définit $\Delta = D^+ \cup T_1(D^-)$ où $T_1 : z \mapsto z + 1$.

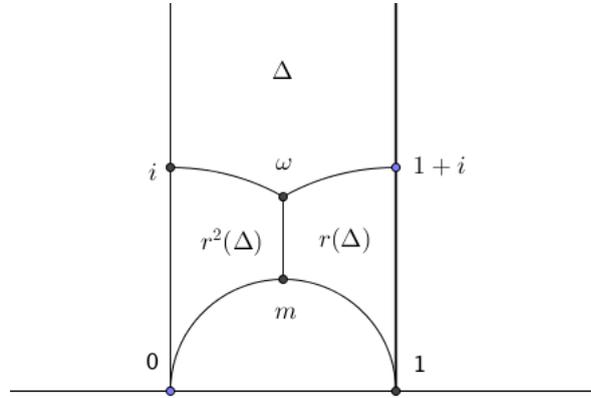
Autrement dit Δ a l'allure suivante : (partie du dessus dans la bande d'abscisses entre 0 et 1)



Par construction Δ est aussi un domaine fondamental puisque pour tout $z \in \mathbb{H}$, s'il admet un unique représentant de son orbite dans \mathring{D} ou bien ce représentant est dans D^+ et donc il est dans Δ ou bien il est dans D^- et dans ce cas son image par $T_1 : z \mapsto z + 1$ sera l'unique représentant dans Δ . De même pour les bords.

2.4 Une extension "d'ordre 3" du domaine fondamental

On considère le domaine fondamental Δ défini au § 2.3. En considérant l'homographie $r : z \mapsto \frac{z-1}{z}$, qui admet le point $\omega = -j^2$ comme point fixe, et qui est d'ordre 3, on peut considérer l'ensemble $P = \Delta \cup r(\Delta) \cup r^2(\Delta)$ qui est exactement le triangle idéal de sommets $0, 1, \infty$. On le note P ici car ce sera notre « pavé » fondamental pour la suite.



Alors bien sûr :

P n'est plus un domaine fondamental, mais il l'est « modulo l'action de $\{\text{id}, r, r^2\}$ » autrement dit :

$$\bigcup_{\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})} \gamma(P) = \mathbb{H}, \text{ et } \gamma(\overset{\circ}{P}) \cap \overset{\circ}{P} \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma(\overset{\circ}{P}) = \overset{\circ}{P} \Leftrightarrow \gamma \in \{\text{id}, r, r^2\}.$$

Justification du dessin (i.e. des images $r(\Delta)$ et $r^2(\Delta)$) :

on calcule avec $r(z) = (z-1)/z$ que $r(\omega) = \omega$, $r(i) = 1+i$, $r(1+i) = m = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ et $r(\infty) = 1$, ce qui donne bien que l'image des quatre sommets du quadrilatère hyperbolique $[\omega, i, \infty, 1+i]$, lequel s'envoie bien que $[\omega, 1+i, 1, m]$. De même avec r^2 .

2.5 Les lignes de Farey et le pavage de Farey

Définition : On note L la géodésique « verticale » (0∞) . On appelle ici *lignes de Farey* toutes les images $\gamma(L)$ de L par toutes les homographies $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$.

2.5.1 Les lignes de Farey qui passent par ∞ :

Avec $\gamma = T_1^k$ où $T_1 : z \mapsto z+1$ on obtient bien sûr comme lignes de Farey toutes les droites verticales $(k\infty)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

Mais mieux :

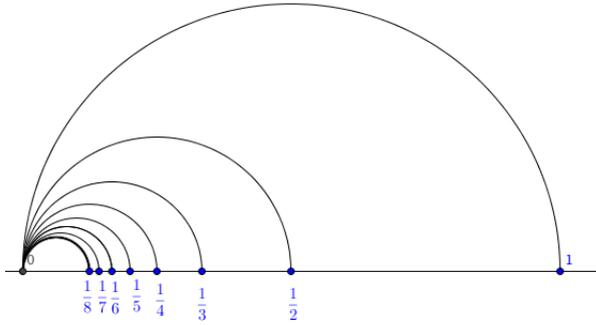
Exercice : le sous-groupe $\langle T_1 \rangle := \{T_1^k, k \in \mathbb{Z}\}$ est exactement le stabilisateur de ∞ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

On peut en déduire que :

Les géodésiques $(k\infty)$ sont exactement *toutes* les lignes de Farey qui partent de ∞

2.5.2 Comment on en déduit toutes les lignes de Farey passant par un point $x \in \mathbb{Q}$?

Exercice : montrer que les lignes de Farey passant par 0 sont toutes les géodésiques $(0, 1/k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ (avec la convention $1/0 = \infty$).



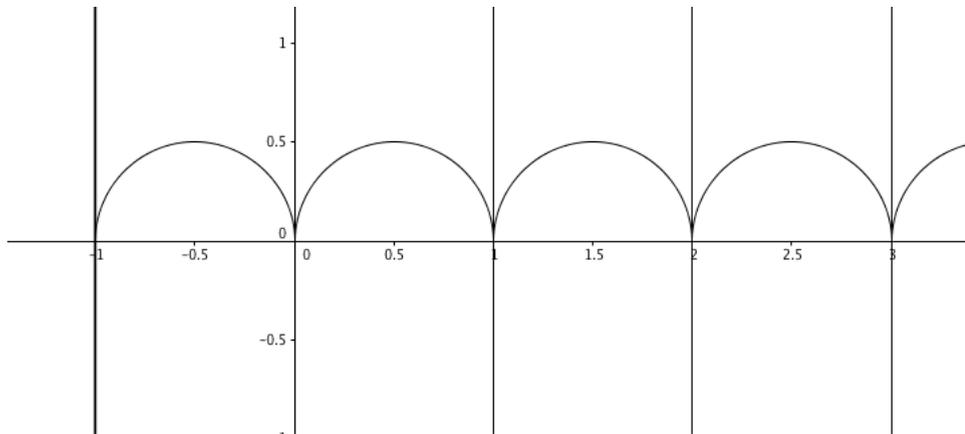
2.5.3 Le pavage de Farey

Au 2.4, on a noté P le triangle hyperbolique de sommets à l'infini $0, 1, \infty$. On a dit que ce triangle est la réunion de trois cellules du pavage obtenu en faisant agir $PSL(2, \mathbb{Z})$ à partir du domaine fondamental Δ .

Ainsi, $\bigcup_{\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})} \gamma(P)$ constitue encore un pavage de \mathbb{H} qu'on appellera *le pavage de Farey*. Les cellules $\gamma(P)$ de ce pavage sont donc toutes les triangles hyperboliques dont les bords sont les lignes de Farey définies ci-dessus

La compréhension fine de la forme de ce pavage est reportée à la section 4. Les exercices de la section précédente donnent déjà des cellules évidentes :

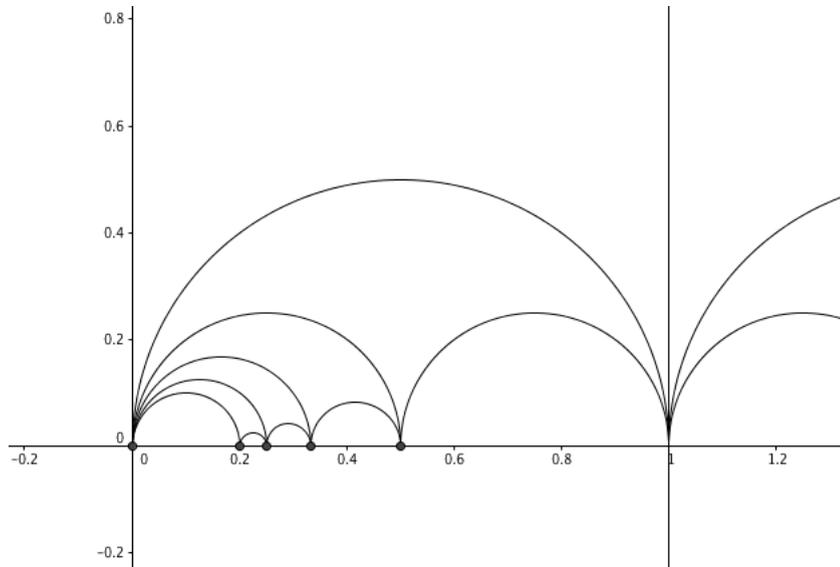
- celles obtenues à partir de P par les puissances de $T_1 : z \mapsto z + 1$. On a aussi noté $T_1 = \tau_U$ où $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dessinées ci-dessous.



- celles obtenues à partir des précédentes en faisant agir les puissances de $T_{-1} : z \mapsto \frac{z}{z+1}$. On a aussi noté $T_{-1} = \tau_L$ où $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

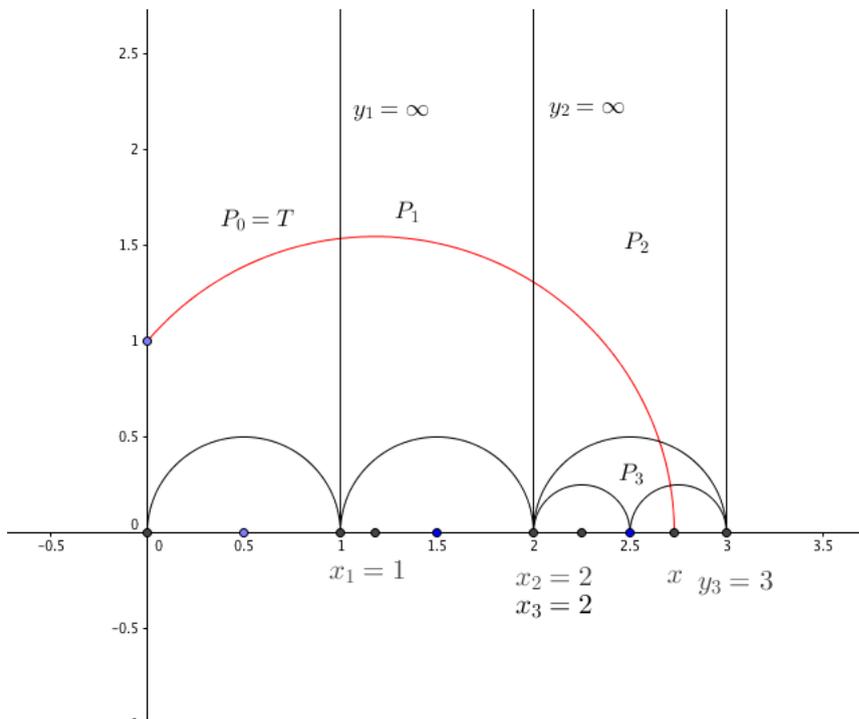
Comme $T_{-1}(0) = 0$ et $T_{-1}(\infty) = 1$ et $T_{-1}(1) = 1/2$ l'image $T_{-1}(P)$ est le triangle de sommets $0, 1, 1/2$.

Mais ensuite avec $T_{-1}^2 : z \mapsto 1/(2 + 1/z)$, on a $T_{-1}^2(0) = 0$, $T_{-1}^2(\infty) = 1/2$ et $T_{-1}^2(1) = 1/3$ d'où le triangle $0, 1/2, 1/3$ donc on peut comprendre le dessin ci-dessus comme représentant (très imparfaitement) ce pavage de Farey.



3 Comment voir les développement en fraction continue avec les géodésiques et le pavage de farey

3.1 Un dessin plutôt qu'un long discours



Soit $x \in \mathbb{R}$. On dessine la géodésique $[i, x)$ dans \mathbb{H} . On note (L_k) la suite des lignes de Farey successives coupées par $[i, x)$ en allant de i vers x . On oriente chaque L_k de sorte que l'angle orienté entre $[i, x)$ et L_k soit dans $]0, \pi[$ et on note L_k^+ la géodésique L_k munie de cette orientation et on note $\tilde{L}_k^+ = (x_k y_k)$.

Noter qu'on a toujours $L_0^+ = (0\infty)$, et sur la figure ci-dessus $L_1^+ = (1\infty)$, $L_2^+ = (2\infty)$, $L_3^+ = (2, 3)$, $L_4^+ = (2.5, 3)$.

On considère les points d'intersections successifs de $[i, x)$ avec les L_k : à chacun de ces points $[i, x)$ (dans le sens du paramétrage de i à x) pénètre dans une cellule de Farey qui sont toutes

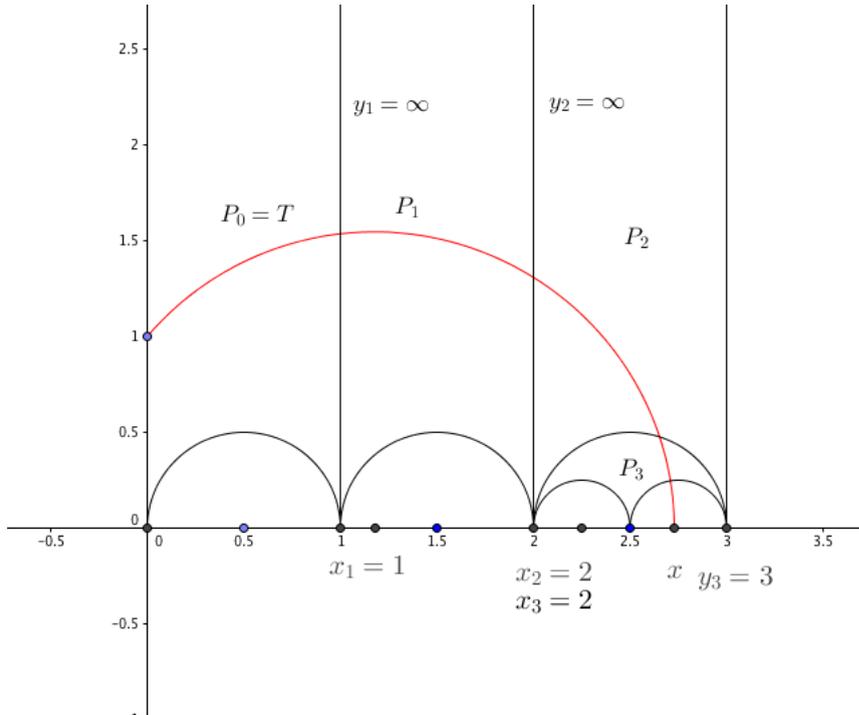
des triangles géodésiques disons de la forme $P_k = [x_k, y_k, z_k]$ où $L_k^+ = (x_k, y_k)$. Alors la géodésique suivante rencontrée par $[i, x)$ sera un de deux autres côtés de ce triangle.

3.1.1 Les nombres ε_k

Pour chaque $k \geq 0$, on s'oriente dans le sens du parcours de la géodésique $[i, x)$ pour définir des nombres ε_{k+1} (en commençant donc par ε_1) :

- (1) Si la géodésique ressort du triangle P_k par le côté qui contient le sommet à *gauche* de L_k^+ à savoir y_k , on pose $\varepsilon_{k+1} = +1$
- (2) Si elle ressort par le côté qui contient le sommet à *droite* de L_k^+ à savoir x_k , on pose $\varepsilon_{k+1} = -1$.

Dans le cas (1), on a alors $y_{k+1} = y_k$ et dans le cas (2) on a $x_{k+1} = x_k$.



Sur le dessin ci-dessus : le premier triangle³ $P_0 = T$ est $0, \infty, 1$, $L_0 = [x_0, y_0] = [0, \infty]$ et $[i, x)$ sort de P_0 par le côté $[\infty, 1]$ donc $\varepsilon_1 = 1$ (on sort par le côté contenant le côté de gauche

Il se passe la même chose dans le second triangle $P_1 = [1, \infty, 2]$ et donc $\varepsilon_2 = 1$

En revanche dans P_2 qui est $[2, \infty, 3]$ la géodésique sort par le côté $[2, 3]$ c'est à dire le côté à droite de l'entrée donc $\varepsilon_3 = -1$.

Ensuite dans $P_3 = [2, 3, 2.5]$ elle ressort par le côté à gauche de l'entrée donc $\varepsilon_4 = +1$.

3.1.2 Les nombres a_k et le théorème sur le développement en fractions continues

A partir de la construction du paragraphe précédent, on définit des nombres (a_k) comme suit

- Si $\varepsilon_1 = -1$, on pose $a_0 = 0$.
Sinon $\varepsilon_1 = 1$ et on note $a_0 = \max\{i \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [1, i], \varepsilon_k = +1\}$.
Autrement dit a_0 compte le nombre de fois où $\varepsilon_k = +1$ consécutivement à partir de ε_1 .
- Ensuite, par récurrence, si on a défini a_0, \dots, a_{k-1} pour un $k \geq 1$, on définit a_k comme suit : on note $N_{k-1} = a_0 + \dots + a_{k-1}$.
et on définit

$$a_k = \max\{i > N_{k-1}, \forall j \in [N_{k-1}, i], \varepsilon_j = (-1)^k\}$$

³ avec la lettre P comme élément du pavage, pour éviter les conflits de notations avec les transformations T_1 et T_{-1}

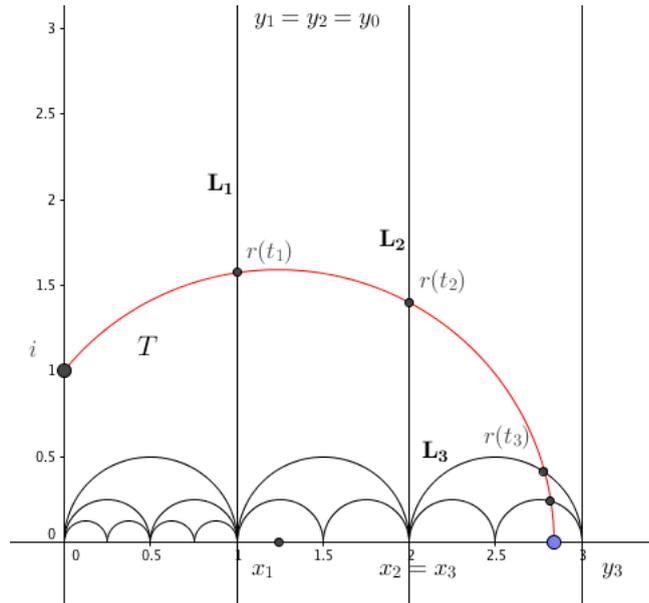
Autrement dit : ε_k prend successivement a_0 fois la valeur 1, puis a_1 fois la valeur -1 , puis a_2 fois la valeur 1 etc..
 et on a le :

Théorème : Le développement en fraction continue de x est exactement $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$.

3.2 Démonstration du théorème

On garde les mêmes notations qu'au § 3.1 : en particulier x est un nombre réel positif et (L_n) est la suite (on va voir qu'elle est finie pour les rationnels, infinie pour les irrationnels) des lignes de Farey, rencontrées successivement par $[i, x)$. On rappelle que $L_0 = (0\infty)$ est notée simplement L .

Soit $r : [0, +\infty[\rightarrow [i, x)$ le paramétrage par la longueur d'arc de la géodésique $[i, x)$ avec $r(0) = i$. On note $r(t_n)$ les points d'intersection avec (t_n) strictement croissante, comme indiqué sur le dessin suivant :



Comme déjà dit au § 3.1, pour chaque valeur de n , on note L_n^+ la courbe L_n orientée de sorte que l'angle orienté entre $[i, x)$ et (L_n) soit dans $]0, \pi[$ c'est-à-dire de droite à gauche quand on se met à la place d'un point $r(t)$ qui parcourt la géodésique.

Lemme d'unicité : il existe une unique homographie $\gamma_n \in PSL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\gamma_n(L^+) = L_n^+$ c'est-à-dire telle que $\gamma_n(0) = x_n$ et $\gamma_n(\infty) = y_n$.

Preuve du lemme :

- L'existence est presque évidente puisque que par déf. (cf § 2.5) les lignes de Farey sont les images de L par $PSL_2(\mathbb{Z})$. Reste seulement à justifier qu'on peut choisir l'homographie envoyant L sur L_n pour qu'elle respecte l'orientation. Mais si on a une homographie g_n telle que $L_n = g_n(L)$ et telle que $y_n = g_n(0)$ et $x_n = g_n(\infty)$ (i.e. telle que g_n inverse l'orientation), on considère $\gamma_n = g_n \circ s$ où $s \in PSL_2(\mathbb{Z})$ est définie par $s : z \mapsto -1/z$.

- Pour l'unicité : si on avait deux éléments γ_n et γ'_n dans $PSL_2(\mathbb{Z})$ tels que $\gamma_n(0) = \gamma'_n(0) = x_n$ et $\gamma_n(\infty) = \gamma'_n(\infty) = y_n$. Alors la composée $h = \gamma_n^{-1} \circ \gamma'_n$ aurait deux points fixes 0 et ∞ .

En tant qu'homographie elle serait de la forme $h : z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda > 0$ mais ici $h \in PSL_2(\mathbb{Z})$ donc $\lambda = 1$ donc $h = id$. □

Avec ce lemme, on peut énoncer la propriété clef suivante :

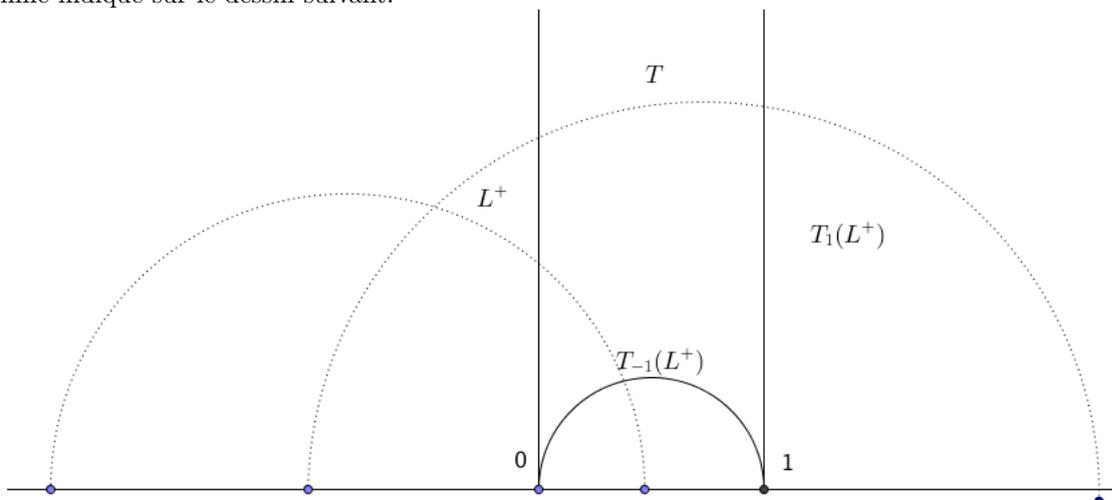
Propriété : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que γ_n et γ_{n+1} sont définis^a, on a la relation :

$$\begin{cases} \gamma_{n+1} = \gamma_n \circ T_1 & \text{si } \varepsilon_{n+1} = 1, \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n \circ T_{-1} & \text{si } \varepsilon_{n+1} = -1, \end{cases}$$

où ε_{n+1} a été défini précisément au 3.1.1 : il dit si la géodésique sort de la cellule où elle est entrée en $r(t_n)$ par la gauche ($\varepsilon_n = 1$) ou par la droite ($\varepsilon_n = -1$).

^a. ce sera toujours le cas pour x irrationnel. Si x est rationnel, la suite (L_n) est finie

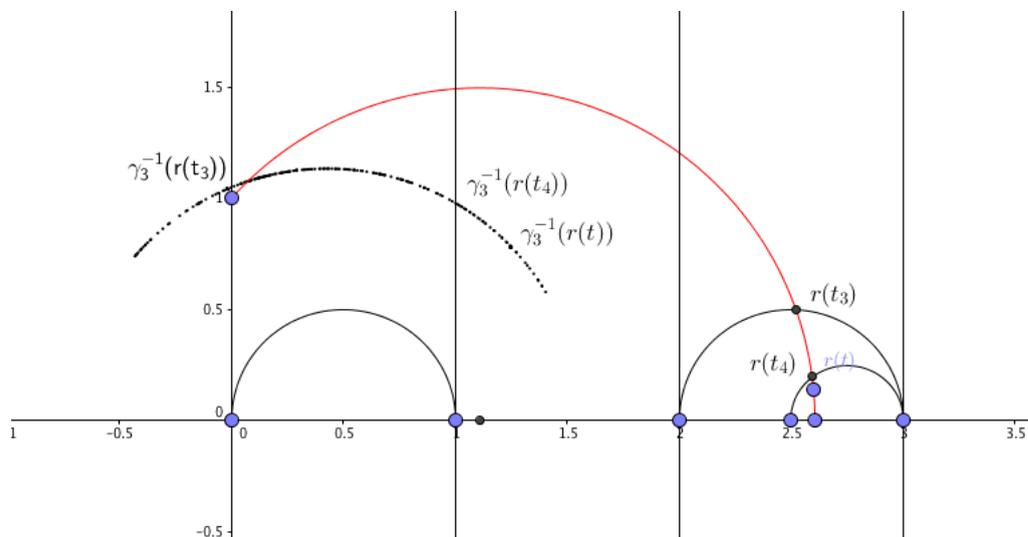
Preuve de la propriété : (i) On rappelle d'abord que pour la « première » cellule du pavage de Farey T , les trois côtés L , $T_1(L)$ (à gauche du point de vue de la géodésique $[i, x)$) et $T_{-1}(L)$, comme indiqué sur le dessin suivant.



Deux géodésiques en pointillés, qui rentrent dans T

En effet l'action de $T_1 : z \mapsto z + 1$ est évidente et $T_{-1} : z \mapsto z/(z + 1)$ envoie 0 sur 0 et ∞ sur 1.

(ii) On considère maintenant la géodésique $\gamma_n^{-1}([i, x))$.



Comme $L_n^+ = \gamma_n(L^+)$, bien sûr $\gamma_n^{-1}([i, x))$ coupe L^+ au point $\gamma_n^{-1}(r(t_n))$ et l'angle orienté entre L^+ et $\gamma_n^{-1}([i, x))$ est le même que celui entre L_n^+ et $[i, x)$.

Suivant cet angle, la géodésique $\gamma_n^{-1}([i, x])$ sort de la cellule fondamentale T par le bord gauche $T_1(L)$ ou par le bord droit $T_{-1}(L)$.

Or ce point de sortie est $\gamma_n^{-1}(r(t_{n+1}))$.

• 1er cas : si $\varepsilon_{n+1} = 1$, on a $\gamma_n^{-1}(r(t_{n+1})) \in T_1(L)$.

Mais ceci suffit dans ce cas pour conclure que $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+) = T_1(L^+)$.

En effet, γ_n^{-1} envoie $r(t_{n+1})$ sur $T_1(L^+)$ et le point commun à L_{n+1} et L_n est envoyé sur le point commun à $T_1(L^+)$ et L^+ .

• 2ème cas : de même si $\varepsilon_{n+1} = -1$, on conclut que $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+) = T_{-1}(L^+)$.

On vient donc de prouver que

$\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+)$ (i.e. la transportée par γ_n^{-1} de la ligne de Farey suivante) se déduit de L^+ par T_1 ou T_{-1}

(iii) Conséquence des égalités d'ensembles prouvées au (ii) :

On sait que $L_{n+1}^+ = \gamma_{n+1}(L^+)$ et $L_n^+ = \gamma_n(L^+)$, donc avec l'égalité qu'on vient de prouver, on a $\gamma_{n+1}(L^+) = \gamma_n \circ T_{\varepsilon_n}(L^+)$.

Avec le même argument que pour le lemme d'unicité vu plus haut (le seul élément de $PSL_2(\mathbb{Z})$ ayant deux points fixes est l'identité), on conclut à l'égalité d'applications $\gamma_{n+1} = \gamma_n \circ \varepsilon_n$, ce qui démontre la propriété. \square

Application de la propriété à la démonstration du théorème :

On en déduit immédiatement qu'avec les notations du § 3.1.2

$\gamma_{N_k} = T_1^{a_0} \circ T_{-1}^{a_1} \circ \dots \circ T_{(-1)^k}^{a_k}$ où $N_k = a_0 + \dots + a_k$.

• Si x est un nombre rationnel, il est à l'extrémité d'une certaine ligne de Farey, donc le processus s'arrête. A l'arrêt du processus, on a $x = \gamma_N(0)$ ou $x = \gamma_N(\infty)$ suivant la parité de N et donc avec les notations du 1.3.2, on a $x = [a_0, \dots, a_N]$

Le théorème est donc démontré pour le rationnels.

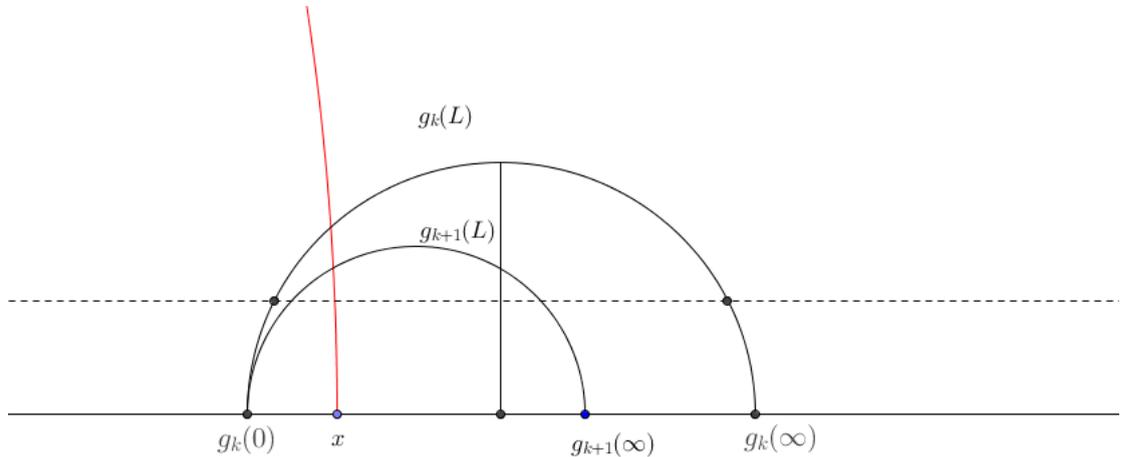
• si x est irrationnel, on sait que $x \in [a_0, a_0 + 1]$ et à chaque étape x est compris entre $\gamma_{N_k}(0)$ et $\gamma_{N_k}(\infty)$ sur la droite réelle.

Ainsi pour montrer que les deux suites $\gamma_{N_k}(0)$ et $\gamma_{N_k}(\infty)$ tendent vers x , il suffit de montrer que $|\gamma_{N_k}(0) - \gamma_{N_k}(\infty)| \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Pour simplifier, on note $g_k = \gamma_{N_k}$:

On raisonne *par l'absurde* et on suppose donc que $|g_k(0) - g_k(\infty)|$ ne tend pas vers zéro. Il existe donc un $d > 0$ et une suite extraite telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|g_{k_p}(0) - g_{k_p}(\infty)| \geq d$.

Comme le demi-cercle de diamètre $[g_{k_p}(0), g_{k_p}(\infty)]$ dans \mathbb{H} est donc de diamètre au moins égal à d , son rayon (euclidien) est au moins $d/2$ donc le point le plus haut de ce demi-cercle est au dessus du segment euclidien horizontal $S = [n_0 + id/2, n_0 + 1 + id/2]$, marqué en pointillés sur le dessin ci-dessous.



Alors tous les $g_{k_p}(L)$ rencontrent ce segment S . Or par construction les fonctions g_{k_p} sont deux à deux distinctes puisque les points d'intersections de $g_{k_p}(L)$ avec $[i, x)$ le sont. On a alors une infinité de fonction $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma(L) \cap S \neq \emptyset$. Or S est un compact et L est le bord de T qui est la réunion de trois domaines fondamentaux pour l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ $(\Delta, r(\Delta), r^2(\Delta))$ cf. § 2.4. Ceci entraînerait donc qu'il y a une infinité de $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ telles que $\gamma(\Delta)$ rencontre le compact S . Ceci est en *contradiction* que l'action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur ce pavage est *localement finie* ce qui signifie que pour tout compact K l'ensemble des $\gamma \in PSL_2(\mathbb{Z})$ tel que $\gamma(F) \cap K \neq \emptyset$ est *fini*.

4 Compréhension plus fine du pavage de Farey

4.1 Première construction du pavage : par génération successive

C'est ce que l'on avait commencé au § pavageFarey : on y avait décrit sommairement deux générations :

- d'abord la génération par les puissances T_1^k à partir de $L = (0\infty)$ qui donne tous les $(k\infty)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- puis la génération par les $T_{-1}^k(L)$ mais aussi les $T_1^l \circ T_{-1}^k \circ T_1^{-l}(L)$ pour avoir la même chose dans chaque cellule.

(A la première génération, on fait agir les éléments qui fixent l'infini, à la deuxième ceux qui fixent les points entiers).

A ce stade on aura aux extrémités des droites de Farey tous les points de la forme $a_0 + \frac{1}{a_1}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1 \in \mathbb{Z}$.

- La troisième génération donnerait les nombres de la forme $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$: on y fait agir les éléments qui fixent les points non entiers obtenus à la deuxième génération.

Prop. Les points ainsi créés comme extrémités des droites de Farey de la n -ième génération sont obtenus par l'action des homographies qui fixent les points de la $n-1$ -ième génération. Algébriquement les points de la $n+2$ -ième génération sont de la forme $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ (car la génération 1 donne les entiers).

4.2 Une autre façon de le comprendre : version géométrique de l'addition du cancre sur les fractions

4.2.1 Un peu de géométrie projective :

On voit $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ comme la droite projective réelle \mathbb{RP}^1 , où les points sont représentés plutôt par des *coordonnées homogènes* $[x : y]$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Deux couples (x, y) et (x', y') représentent le même point, si, et seulement si, il existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(x', y') = \lambda(x, y)$.

On convient que $\infty = [1 : 0]$, alors que tous les $[x : y]$ avec $b \neq 0$ s'écrivent aussi $[x/y : 1]$ et s'identifient au réel x/y .

Cas des coordonnées entières : On se restreint à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\} = \mathbb{QP}^1$. Chaque $m = [x : y]$ avec x, y dans \mathbb{Q} et $y \neq 0$ s'écrit aussi $[r : 1]$ avec $r \in \mathbb{Q}$ et en posant $r = a/b$ avec $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \wedge b = 1$, on a une unique écriture $m = [a : b]$ avec $a \wedge b = 1$ et $b > 0$. Mais il a une autre écriture $m = [-a : -b]$ où on a aussi $(-a) \wedge (-b) = 1$.

4.2.2 Une addition à la Farey... non commutative

Définition (addition de Farey) On considère deux points m et m' de $\mathbb{Q} \cup \infty$ qui admettent une écriture $m = [a : b]$ et $m' = [a' : b']$ telles que la matrice $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ soit dans $SL_2(\mathbb{Z})$.

On définit alors un nouveau point $m'' = m \oplus m' := [a + a' : b + b']$.

Remarque : cette définition est légitime : si on change de représentants pour m et m' (ce qui revient à multiplier les coordonnées par -1) le résultat ne change pas.

Exemple (qui fait comprendre que cette addition de Farey n'est pas commutative) : Si $m = 0$ et $m' = \infty$ dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.

- Pour calculer $\infty \oplus 0$, on doit écrire $\infty = [1 : 0]$ et $0 = [0 : 1]$ car alors la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est bien dans $SL(2, \mathbb{Z})$ et on obtient $\infty \oplus 0 = [1 : 1]$ i.e. le point 1.

- Pour calculer $0 \oplus \infty$, on écrit cette fois $0 = [0 : 1]$ et $\infty = [-1 : 0]$ car alors la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est bien dans $SL(2, \mathbb{Z})$ et on obtient $0 \oplus \infty = [-1 : 1]$ i.e. le point -1 .

Remarque : Bien sûr cette addition est proche de l'addition souvent rencontrée pour la suite de Farey $a/b \oplus a'/b' = \frac{a+a'}{b+b'}$ (cf. [H-W]) sauf que notre addition n'est pas commutative. On va voir l'intérêt de notre \oplus pour la géométrie.

4.2.3 Lien entre \oplus et la construction du pavage de Farey :

On considère le pavé fondamental $P = [0, 1, \infty]$. Si on parcourt ce pavé dans le sens direct, $(\infty 0)$ est le bord orienté.

En revanche (0∞) est le bord orienté de $[-1, 0, \infty]$.

Alors le sommet $1 = [1 : 1]$ est égal à $\infty \oplus 0$ alors que -1 est égal à $0 \oplus \infty$.

Or cette propriété est stable par l'action de $PSL(2, \mathbb{Z})$ puisque :

- $PSL(2, \mathbb{Z})$ envoie les couples de couples d'entiers $((a, b), (a', b'))$ vérifiant la condition $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}$ sur des couples de couples vérifiant la même condition.

- L'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ est linéaire sur les couples donc si $m'' = m \oplus m'$, on a $\gamma(m'') = \gamma(m) \oplus \gamma(m')$ pour tout $\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z})$.

On vient donc de démontrer la :

Propriété : Pour toute droite de Farey (ab) le troisième sommet c du pavé de Farey $[a, b, c]$ orienté dans le sens direct est $c = a \oplus b$

Conséquence : Ainsi, pour deux points a et b reliés par une droite de Farey, avec $a < b$, $b \oplus a$, $b \oplus a \oplus a$ et plus généralement les $b \oplus a \oplus \dots \oplus a$, on obtient toutes les extrémités des droites de Farey entre a et b .

4.3 Un exemple concret

Si on veut comprendre les points voisins de $1/2$ dans le pavage de Farey (i.e les extrémités des droites de Farey qui partent de $1/2$) :

- Avec la méthode des générations successives : avec la prop. de la fin du § 4.1, on obtient les nombres de la forme $0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{k}}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

- Avec l'addition de Farey : ce sont les nombres de la forme $1 \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \dots \oplus \frac{1}{2}$ et ceux de la forme $\frac{1}{2} \oplus \dots \oplus \frac{1}{2} \oplus 0$.

Concrètement pour les nombres entre $1/2$ et 1 : $2/3, 3/5, 4/7$ (on fait $\oplus 1/2$ à chaque fois).

Références

[Bo] R. Bondil, Géométrie des fractions continues, R.M.S. 124-1, octobre 2013.

[Da] F. Dal'bo, Trajectoire géodésiques et horocycles, edp sciences, savoirs actuels, 2007.

[H-W] Hardy and Wright, Introduction à la théorie des nombres, trad. F. Sauvageot, Vuibert-Springer.

[Se] J.P. Serre, cours d'arithmétique, P.U.F.