Réflexions sur ... la réflexion

Romain Bondil

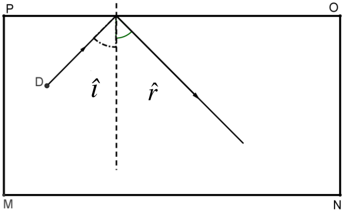
Lycée Joffre, Montpellier

Remise des prix des Olympiades académiques de mathématiques
12 Juin 2013

0 Ce sujet, c'était du billard, non ?

Exercice 2 (Exercice proposé par la cellule nationale)

Un billard rectangulaire



On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.

Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence étant égal à l'angle de réflexion , comme sur la figure ci-contre (.

0 Petite mise au point préliminaire :

- Les vrais joueurs de billards savent qu'en donnant de *l'effet* à la boule, on peut obtenir des rebonds beaucoup plus subtils ! Nous laisserons cela de côté.

0 Petite mise au point préliminaire :

- Les vrais joueurs de billards savent qu'en donnant de *l'effet* à la boule, on peut obtenir des rebonds beaucoup plus subtils ! Nous laisserons cela de côté.
- Dans un vrai billard, la boule va toucher quelques bandes et s'arrêter. Aujourd'hui, nous regarderons aussi des trajectoires très longues... comme si la boule n'était jamais freinée.

0 Petite mise au point préliminaire :

- Les vrais joueurs de billards savent qu'en donnant de *l'effet* à la boule, on peut obtenir des rebonds beaucoup plus subtils ! Nous laisserons cela de côté.
- Dans un vrai billard, la boule va toucher quelques bandes et s'arrêter. Aujourd'hui, nous regarderons aussi des trajectoires très longues... comme si la boule n'était jamais freinée.
- Une situation physique vérifiant plus facilement les deux conditions précédentes :

0 Petite mise au point préliminaire :

- Les vrais joueurs de billards savent qu'en donnant de *l'effet* à la boule, on peut obtenir des rebonds beaucoup plus subtils ! Nous laisserons cela de côté.
- Dans un vrai billard, la boule va toucher quelques bandes et s'arrêter. Aujourd'hui, nous regarderons aussi des trajectoires très longues... comme si la boule n'était jamais freinée.
- Une situation physique vérifiant plus facilement les deux conditions précédentes :
  On remplace la boule de billard par la lumière, qui vérifie bien la même loi de réflexion.

0 Petite mise au point préliminaire :

- Les vrais joueurs de billards savent qu'en donnant de *l'effet* à la boule, on peut obtenir des rebonds beaucoup plus subtils ! Nous laisserons cela de côté.
- Dans un vrai billard, la boule va toucher quelques bandes et s'arrêter. Aujourd'hui, nous regarderons aussi des trajectoires très longues... comme si la boule n'était jamais freinée.
- Une situation physique vérifiant plus facilement les deux conditions précédentes :
  On remplace la boule de billard par la lumière, qui vérifie bien la même loi de réflexion.
- Il y aurait donc bien un lien entre les billards et la casserole...

1. Pourquoi la même loi de réflexion ? Minimisation

- Pourquoi cette *même* loi de la réflexion pour la lumière et les boules de billards “idéales” ?
  Pour le comprendre, considérons ...

1. Pourquoi la même loi de réflexion ? Minimisation

- Pourquoi cette *même* loi de la réflexion pour la lumière et les boules de billards “idéales” ?
  Pour le comprendre, considérons ...
- un chien, qui n’est ni une lumière... ni une bille... mais qui a soif et faim.

1. Pourquoi la même loi de réflexion ? Minimisation

- Pourquoi cette *même* loi de la réflexion pour la lumière et les boules de billards “idéales” ?
  Pour le comprendre, considérons ...
- un chien, qui n’est ni une lumière... ni une bille... mais qui a soif et faim.

- Il en est de même pour une boule de billard entre son point de départ et d’arrivée.
  Le parcours suivi, dans chaque cas minimise l’effort... les physiciens disent l’action.

1. Pourquoi la même loi de réflexion ? Minimisation

Cette loi universelle appelée *principe de moindre action* a été formulée par Maupertuis en 1744.

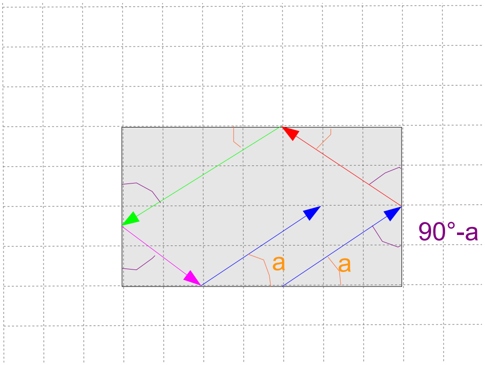
”Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l’être suprême : lorsqu’il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d’Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu’il soit possible.”

2. Les billards rectangulaires

- Lançons une bille sur un billard et étudions les rebonds successifs

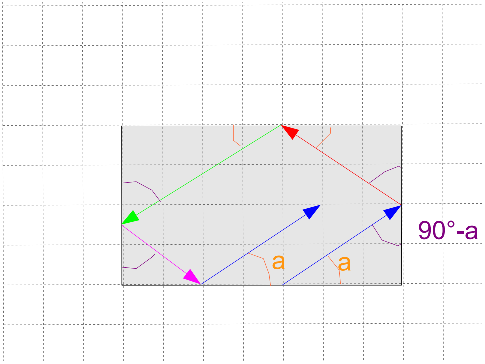
2. Les billards rectangulaires

- Lançons une bille sur un billard et étudions les rebonds successifs



2. Les billards rectangulaires

- Lançons une bille sur un billard et étudions les rebonds successifs



- Au bout de 4 rebonds, la trajectoire est parallèle au premier lancer !

2. Les billards rectangulaires

- Une question difficile posée dans l'exercice d'Olympiade : en partant de n'importe quel point d'une bande, peut-on revenir au point de départ en trois bandes ?

2. Les billards rectangulaires

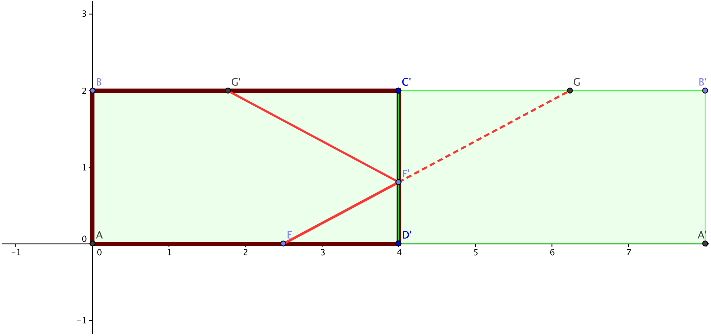
- Une question difficile posée dans l'exercice d'Olympiade : en partant de n'importe quel point d'une bande, peut-on revenir au point de départ en trois bandes ?
- Une façon de comprendre les trajectoires après plusieurs rebonds :

la même idée que pour le chien, généralisée : le dépliage du billard

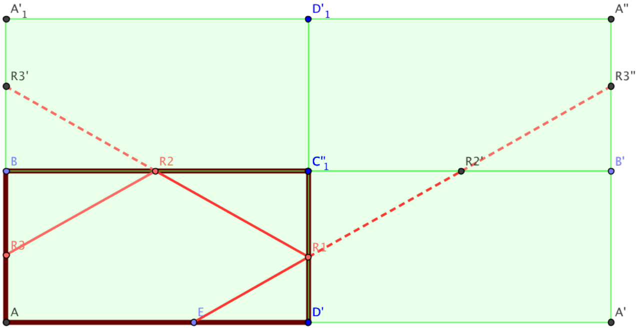
2. Les billards rectangulaires

- Une question difficile posée dans l'exercice d'Olympiade : en partant de n'importe quel point d'une bande, peut-on revenir au point de départ en trois bandes ?
- Une façon de comprendre les trajectoires après plusieurs rebonds :

la même idée que pour le chien, généralisée : le dépliage du billard

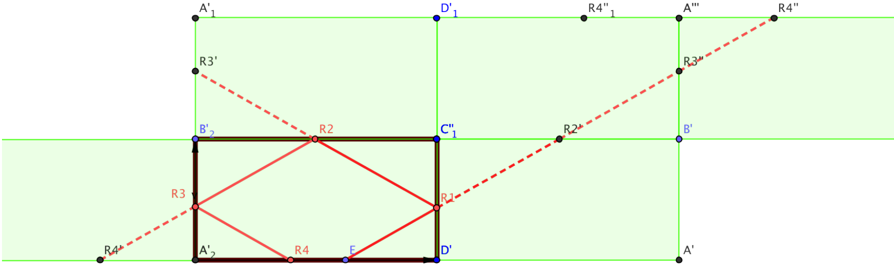


2. Les billards rectangulaires



Après deux rebonds... la ligne droite se continue à droite

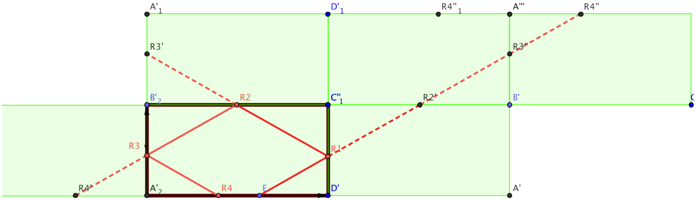
2. Les billards rectangulaires



Pour continuer la ligne droite... rectangle à droite !

2. Les billards rectangulaires

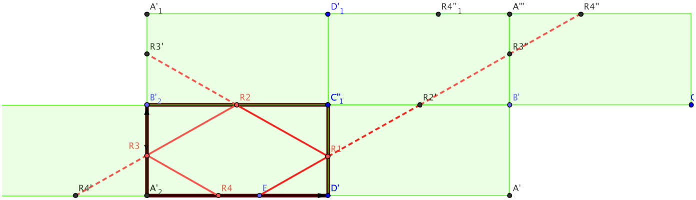
- Moralité : une trajectoire sur le billard correspond à une ligne droite dans le plan carrelé par les copies du billard.



Pour continuer la ligne droite... rectangle à droite !

2. Les billards rectangulaires

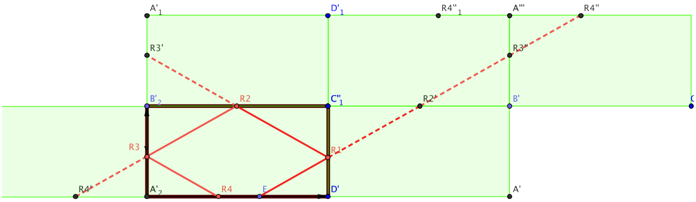
- Moralité : une trajectoire sur le billard correspond à une ligne droite dans le plan carrelé par les copies du billard.
- Pour passer de cette ligne droite à la vraie trajectoire dans le billard, on fait agir des symétries par rapport aux côtés.



Pour continuer la ligne droite... rectangle à droite !

2. Les billards rectangulaires

- Moralité : une trajectoire sur le billard correspond à une ligne droite dans le plan carrelé par les copies du billard.
- Pour passer de cette ligne droite à la vraie trajectoire dans le billard, on fait agir des symétries par rapport aux côtés.
- Ces symétries identifient des points du plan entre eux.

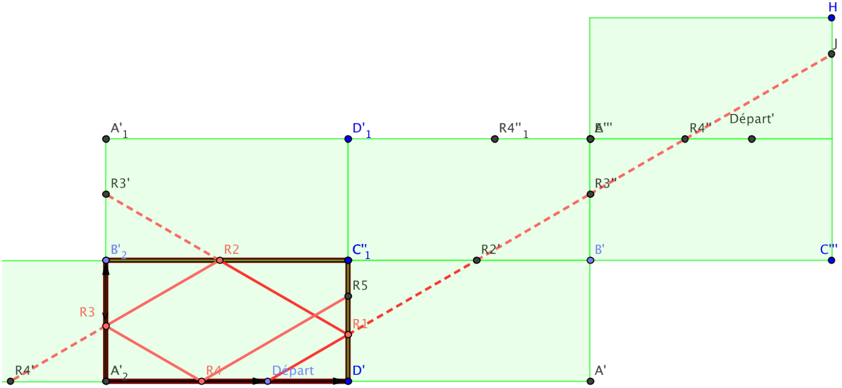


Pour continuer la ligne droite... rectangle à droite !

2. Les billards rectangulaires

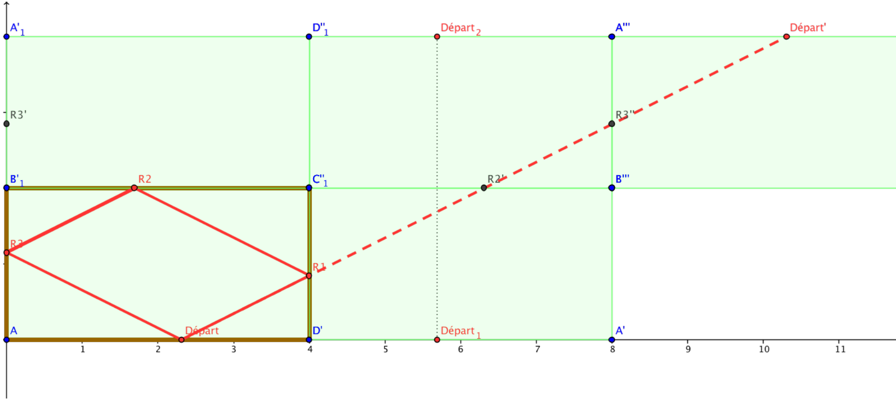
Sur le dessin, R4 et R4” sont identifiés et la balle repart de R4” comme de R4.

De même le point Départ s’identifie à un point Départ’.



2. Les billards rectangulaires : solution du problème

Pour avoir une trajectoire qui se referme, on fait correspondre les points R4” et Départ’.



La solution du problème version animée

- Une animation.

La solution du problème version animée

- Une animation.
- En pratique : le point de premier rebond est donc déterminé comme intersection avec la première bande de la droite imaginaire reliant Départ et Départ'.

La solution du problème version animée

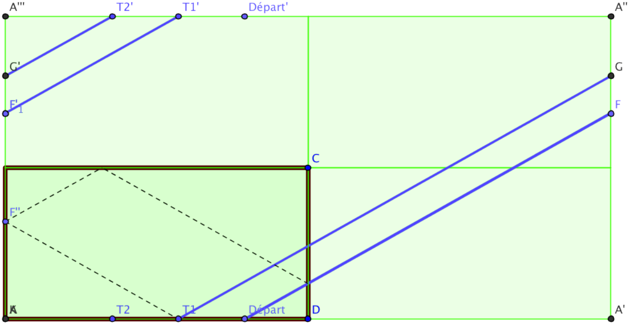
- Une animation.
- En pratique : le point de premier rebond est donc déterminé comme intersection avec la première bande de la droite imaginaire reliant Départ et Départ'.
- Toutes les trajectoires fermées (allant vers la droite) sont parallèles entre elles et parallèles à la diagonale, donc de pente l/L.

2. Un nouveau problème encore plus compliqué !

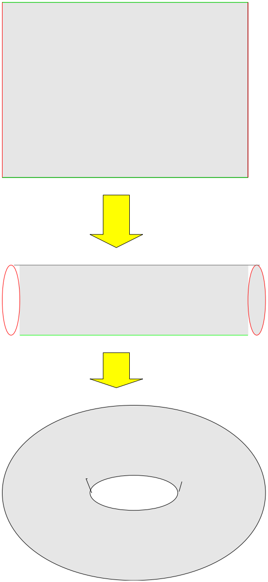
- Quel angle de tir permettrait d'obtenir une trajectoire qui revienne au point de départ non pas au bout d'un tour, mais de deux tours ou plus ?

2. Un nouveau problème encore plus compliqué !

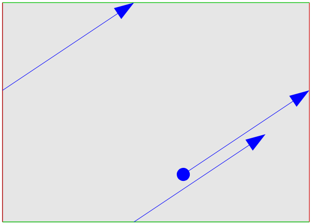
- Quel angle de tir permettrait d'obtenir une trajectoire qui revienne au point de départ non pas au bout d'un tour, mais de deux tours ou plus ?
- Une nouvelle façon de penser au dépliage du billard rectangulaire : en se concentrant sur une zone formée de quatre rectangles, qu'on appellera *grand rectangle*.

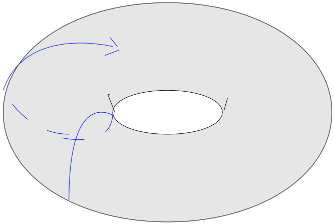


2. Le grand rectangle : tore ou rectangle pac-man



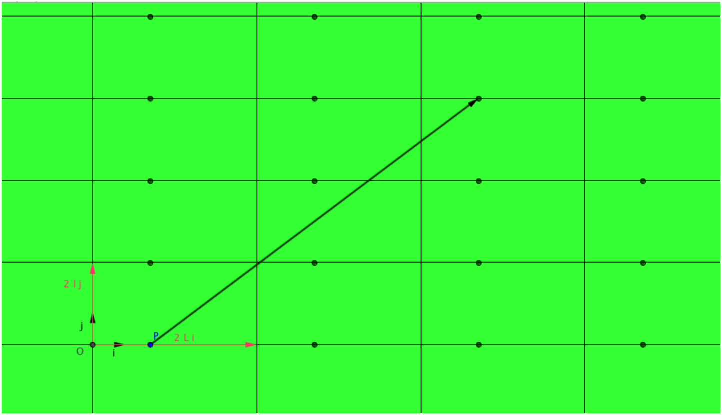
2. Les trajectoires vues en pac-man et sur le tore





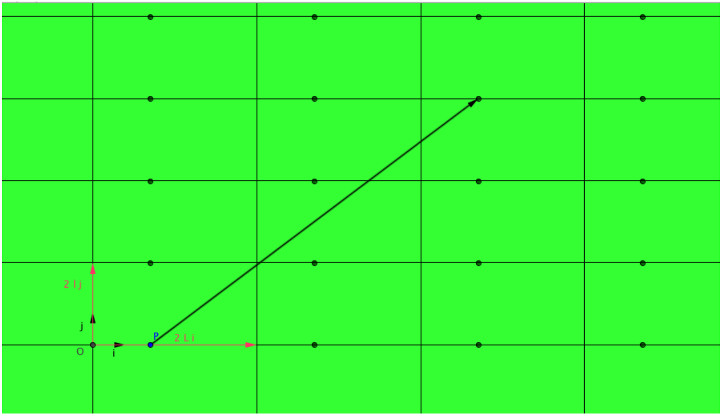
2. La solution du problème des trajectoires fermées

- On revient dans le plan qu'on considère comme quadrillé par les rectangles pac-man. Chaque rectangle pac-man a une longueur $2L$ et une largeur $2l$ (4 billards).



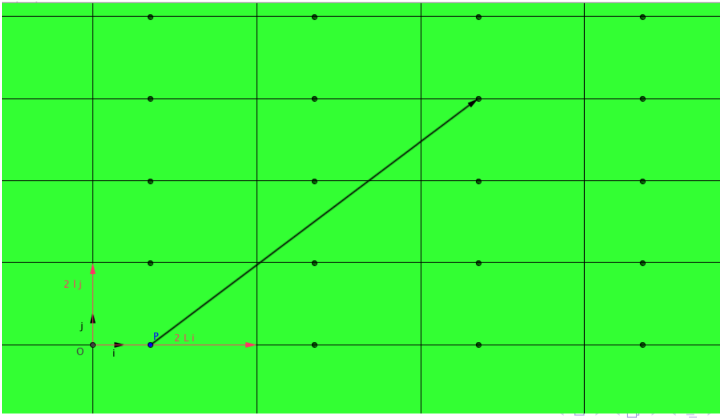
2. La solution du problème des trajectoires fermées

- On revient dans le plan qu'on considère comme quadrillé par les rectangles pac-man. Chaque rectangle pac-man a une longueur $2L$ et une largeur $2l$ (4 billards).
- Deux points du plan donnent le même point sur le tore ssi ils se déduisent par translation d'un vecteur $2mL\vec{i} + 2nl\vec{j}$.



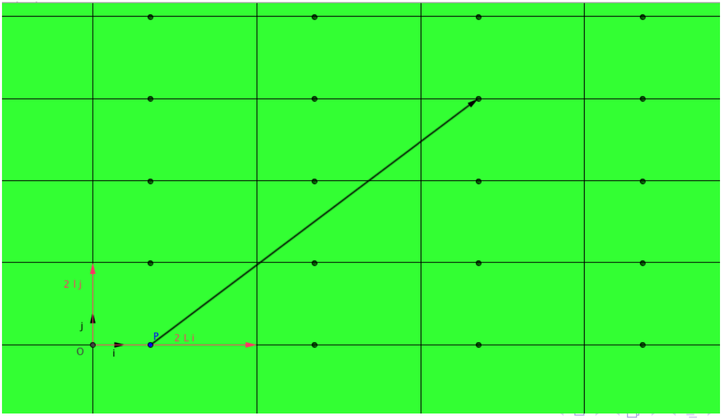
2. La solution du problème des trajectoires fermées : petit calcul

- Une trajectoire partant d'un point $(x_0, 0)$ et de pente p sera périodique ssi la droite d'équation $y = p(x - x_0)$ contient un point de la forme $(x_0 + 2mL, 2nl)$ où m et n sont des entiers.



2. La solution du problème des trajectoires fermées : petit calcul

- Une trajectoire partant d'un point $(x_0, 0)$ et de pente p sera périodique ssi la droite d'équation $y = p(x - x_0)$ contient un point de la forme $(x_0 + 2mL, 2nl)$ où m et n sont des entiers.
- Un peu de calcul : $2nl = p(2mL)$ équivaut à $p = \frac{n}{m}\frac{l}{L}$.



2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\dfrac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\frac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\frac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.
- Or il existe d'autres nombres réels... dit *irrationnels*. Comme $\sqrt{2}$, comme π, en fait tous les nombres dont l'écriture décimale :
  - ne s'arrête pas et
  - ne se répète pas à partir d'un moment.

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\frac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.
- Or il existe d'autres nombres réels... dit *irrationnels*. Comme $\sqrt{2}$, comme π, en fait tous les nombres dont l'écriture décimale :
  - ne s'arrête pas et
  - ne se répète pas à partir d'un moment.

  Par exemple, $r_1 = 1,01001000100001...$ est *irrationnel*. En revanche $r_2 = 0,142857142857142857...$ est un *rationnel*...

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\frac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.
- Or il existe d'autres nombres réels... dit *irrationnels*. Comme $\sqrt{2}$, comme π, en fait tous les nombres dont l'écriture décimale :
  - ne s'arrête pas et
  - ne se répète pas à partir d'un moment.

  Par exemple, $r_1 = 1,010010001000001...$ est *irrationnel*. En revanche $r_2 = 0,142857142857142857...$ est un *rationnel*...

  En fait, $r_2 = 1/7$.

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\dfrac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\dfrac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.
- Or il existe d'autres nombres réels... dit *irrationnels*. Comme $\sqrt{2}$, comme π, en fait tous les nombres dont l'écriture décimale :
  - ne s'arrête pas et
  - ne se répète pas à partir d'un moment.

  Par exemple, $r_1 = 1,01001000100001...$ est *irrationnel*. En revanche $r_2 = 0,142857142857142857...$ est un *rationnel*...

  En fait, $r_2 = 1/7$.
- Que se passe-t-il alors si on lance la boule avec une pente $p = \dfrac{l}{L} \times r$ avec r *irrationnel* ?

2. La solution du problème des trajectoires fermées et encore une question ?

- Les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec n et m entiers sont appelés les nombres *rationnels*.
- On vient de montrer que les pentes p de tir qui donnent une trajectoire fermée sont donc celles telles que p soit de la forme $\frac{l}{L} \times r$ où r est un nombre *rationnel*.
- Or il existe d'autres nombres réels... dit *irrationnels*. Comme $\sqrt{2}$, comme π, en fait tous les nombres dont l'écriture décimale :
  - ne s'arrête pas et
  - ne se répète pas à partir d'un moment.

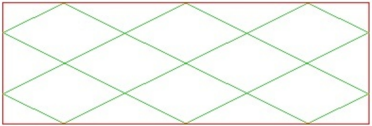
  Par exemple, $r_1 = 1,01001000100001...$ est *irrationnel*. En revanche $r_2 = 0,142857142857142857...$ est un *rationnel*...

  En fait, $r_2 = 1/7$.
- Que se passe-t-il alors si on lance la boule avec une pente $p = \frac{l}{L} \times r$ avec r *irrationnel* ?
- $\boxed{\text{En science : chaque réponse appelle une nouvelle question !}}$

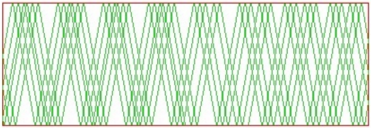
2. Les trajectoires *denses* dans le billard ou sur le tore

En changeant de logiciel... pour faire plus de rebonds : voici ce qu'on obtient avec des pentes rationnelles (trajectoires fermées) : (la boule est en vert, le billard en blanc) :

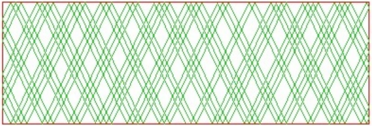
graphe([[[0, 0], [0, 10], [30, 10], [30, 0], [0, 0]], [15, 0], [−2, 1]], 100);



graphe([[[0, 0], [0, 10], [30, 10], [30, 0], [0, 0]], [15, 0], [−8, 43]], 100);



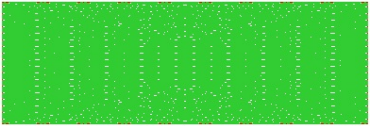
graphe([[[0, 0], [0, 10], [30, 10], [30, 0], [0, 0]], [15, 0], [−11, 23]], 100);



2. Les trajectoires *denses* dans le billard ou sur le tore

- Ce qu'on obtient après mille rebonds avec une pente irrationnelle :

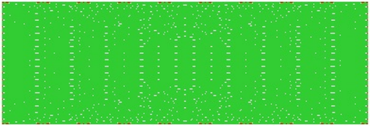
graphe([[[0, 0], [0, 10], [30, 10], [30, 0], [0, 0]], [15, 0], [−110,21]], 1000);



2. Les trajectoires *denses* dans le billard ou sur le tore

- Ce qu'on obtient après mille rebonds avec une pente irrationnelle :

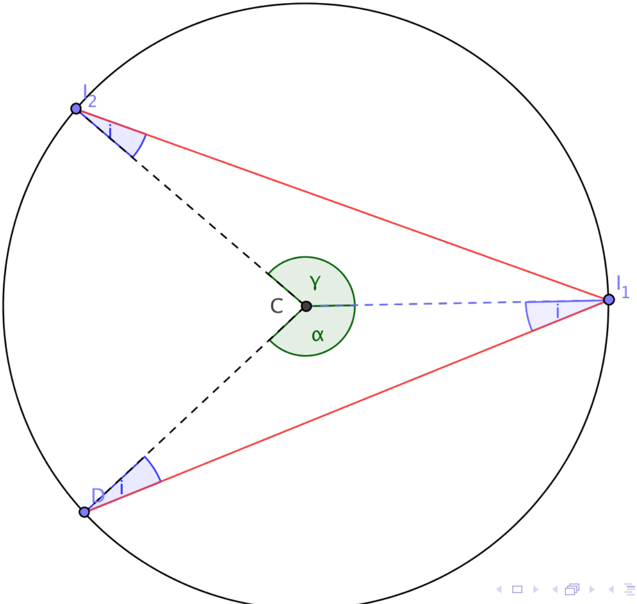
graphe([[[0, 0], [0, 10], [30, 10], [30, 0], [0, 0]], [15, 0], [−110,21]], 1000);



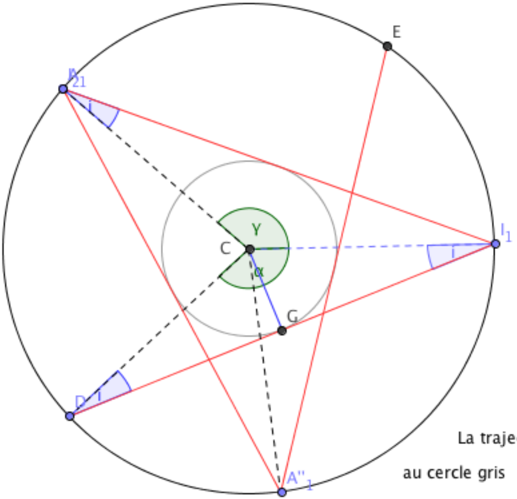
- La trajectoire de la boule (en vert) “remplit” le billard ! Plus exactement, elle passe aussi près qu'on veut de n'importe quel point du billard.

3. Cas du billard circulaire

Premières applications de la loi de réflexion : $\gamma = \alpha$.



3. Cas du billard circulaire : un cercle tangent



$CG = R\sin(i)$

La trajectoire reste tangente

au cercle gris

3. Cas du billard circulaire : une animation

- Sur l'animation, on fait varier l'angle de la trajectoire et le point de départ... On a vu qu'un petit angle donne un petit sinus donc un petit rayon du cercle tangent.

- Contrairement au cas des billards rectangulaires, quand on fixe un certain angle de tir, en gardant des angles de tirs voisins, on sait qu'on pourra balayer *une certaine zone du billard*, délimitée par le *cercle gris* : les points à l'intérieur du cercle ne seront pas atteints.

3. Cas du billard circulaire : une animation

- Sur l'animation, on fait varier l'angle de la trajectoire et le point de départ... On a vu qu'un petit angle donne un petit sinus donc un petit rayon du cercle tangent.
- Le petit cercle est dessiné... sans qu'on l'ait dessiné pour lui-même... mais comme ... enveloppant les rayons réfléchis, c'est ce qu'on appelle une caustique.

- Contrairement au cas des billards rectangulaires, quand on fixe un certain angle de tir, en gardant des angles de tirs voisins, on sait qu'on pourra balayer *une certaine zone du billard*, délimitée par le *cercle gris* : les points à l'intérieur du cercle ne seront pas atteints.

3. Cas du billard circulaire : une animation

- Sur l'animation, on fait varier l'angle de la trajectoire et le point de départ... On a vu qu'un petit angle donne un petit sinus donc un petit rayon du cercle tangent.
- Le petit cercle est dessiné... sans qu'on l'ait dessiné pour lui-même... mais comme ... enveloppant les rayons réfléchis, c'est ce qu'on appelle une caustique.

- Contrairement au cas des billards rectangulaires, quand on fixe un certain angle de tir, en gardant des angles de tirs voisins, on sait qu'on pourra balayer *une certaine zone du billard*, délimitée par le *cercle gris* : les points à l'intérieur du cercle ne seront pas atteints.

Conclusion partielle après les parties 2 et 3

- Du point de vue *physique*, par exemple, si on remplace les boules de billards par des molécules (électrons...) , la différence qui vient d'être faite entre billards rectangulaires et billards circulaire est essentielle :

,

Conclusion partielle après les parties 2 et 3

- Du point de vue *physique*, par exemple, si on remplace les boules de billards par des molécules (électrons...) , la différence qui vient d'être faite entre billards rectangulaires et billards circulaire est essentielle :
- dans le cas rectangulaire ces particules vont *partout*,

Conclusion partielle après les parties 2 et 3

- Du point de vue *physique*, par exemple, si on remplace les boules de billards par des molécules (électrons...) , la différence qui vient d'être faite entre billards rectangulaires et billards circulaire est essentielle :
- dans le cas rectangulaire ces particules vont *partout*,
- dans le cas circulaire, au voisinage d'un angle initial donné, les particules seront limitées à une certaine zone.

Conclusion partielle après les parties 2 et 3

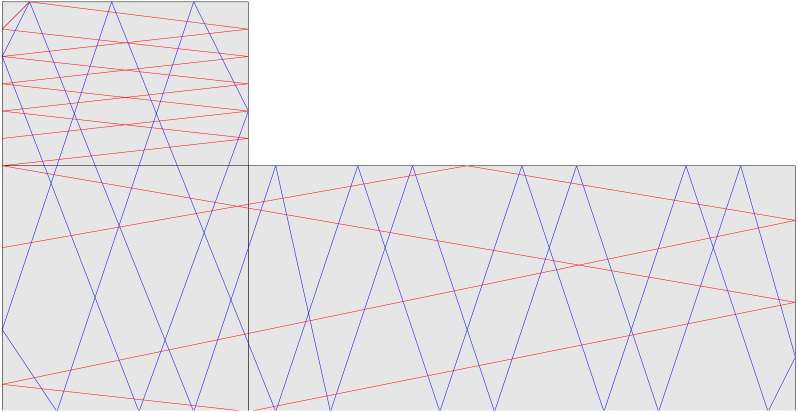
- Du point de vue *physique*, par exemple, si on remplace les boules de billards par des molécules (électrons...) , la différence qui vient d'être faite entre billards rectangulaires et billards circulaire est essentielle :
- dans le cas rectangulaire ces particules vont *partout*,
- dans le cas circulaire, au voisinage d'un angle initial donné, les particules seront limitées à une certaine zone.
- Nous allons voir comment cette différence se généralise à d'autres objets.

4. Généralisations de la situation du rectangle ...

Il existe des billards plus exotiques :

4. Généralisations de la situation du rectangle ...

Avec comme trajectoire “simple” ..



4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  $\boxed{\text{polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.}}$

,

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  $\boxed{\text{polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.}}$
- On sait classifier ces polygones :
  il ne peut s'agir que de certains ,

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.
- On sait classifier ces polygones :
  il ne peut s'agir que de certains ,

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.
- On sait classifier ces polygones :
  il ne peut s'agir que de certains   triangles,

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  $\boxed{\text{polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.}}$

- On sait classifier ces polygones :
  il ne peut s'agir que de certains triangles, quadrilatères

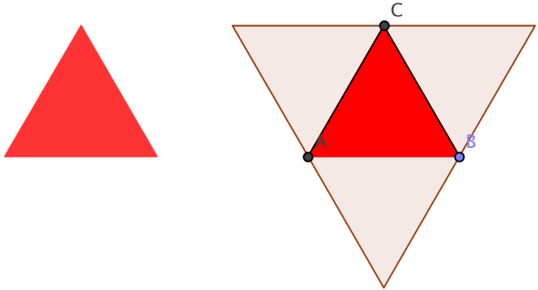
4.1Un cas qui généralise bien les rectangles :

- La méthode du dépliage s'applique pour les :

  polygones qui pavent le plan par réflexions successives sur les côtés.

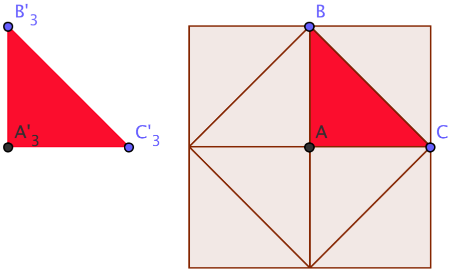
- On sait classifier ces polygones :
  il ne peut s'agir que de certains triangles, quadrilatères ou des hexagones réguliers

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles : les triangles pavants par réflexion



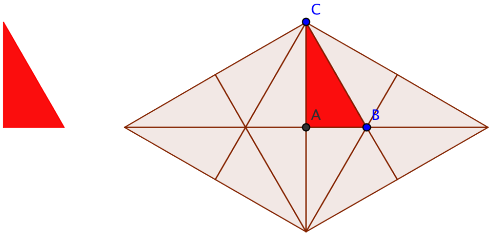
Le premier type : l'équilatéral.

4.1 Un cas qui généralise bien les rectangles : les triangles pavants



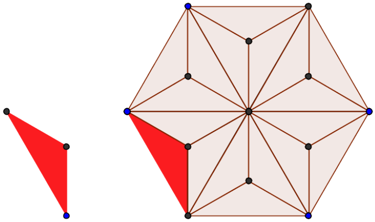
2eme type : triangle rectangle isocèle

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles : les triangles pavants par réflexion



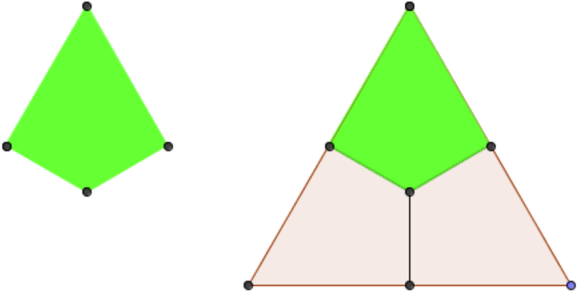
Les demi-triangles équilatéraux (rectangles...)

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles : les triangles pavants par réflexion



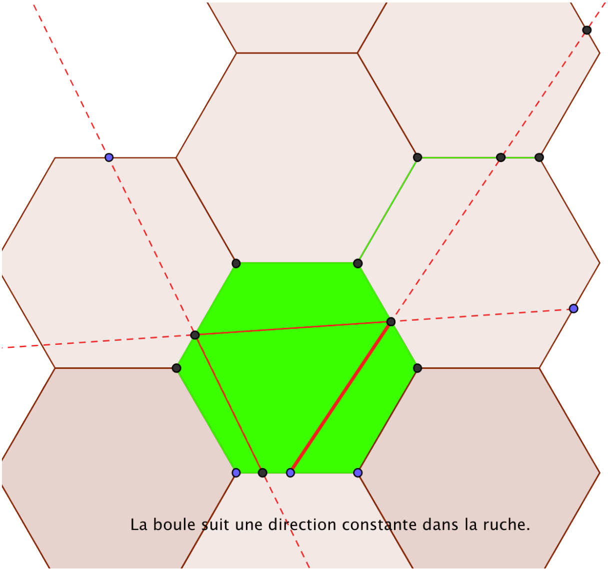
4ème cas : moins facile à trouver ?

4.1Un cas qui généralise bien les rectangles : les quadrilatères pavants par réflexion



2eme quadrilatere pavant

4.1.Un cas qui généralise bien les rectangles : les hexagones réguliers



4.2. Que faire sinon : le cas des triangles généraux ?

- Du travail pour les lauréats des olympiades :

4.2. Que faire sinon : le cas des triangles généraux ?

- Du travail pour les lauréats des olympiades :
  Existe-t-il, dans tout billard triangulaire, une trajectoire de billard qui se referme ?

4.2. Que faire sinon : le cas des triangles généraux ?

- Du travail pour les lauréats des olympiades :
  Existe-t-il, dans tout billard triangulaire, une trajectoire de billard qui se referme ?
- Un problème tout simple à poser... qu'aucun mathématicien ne sait résoudre à ce jour !

4.2. Que faire sinon : le cas des triangles généraux ?

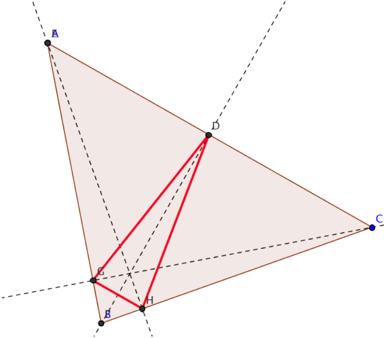
- Du travail pour les lauréats des olympiades :
  Existe-t-il, dans tout billard triangulaire, une trajectoire de billard qui se referme ?
- Un problème tout simple à poser... qu'aucun mathématicien ne sait résoudre à ce jour !
  Un prix est même proposé pour sa solution : à vous de jouer !

4.2. Cas des triangles généraux :

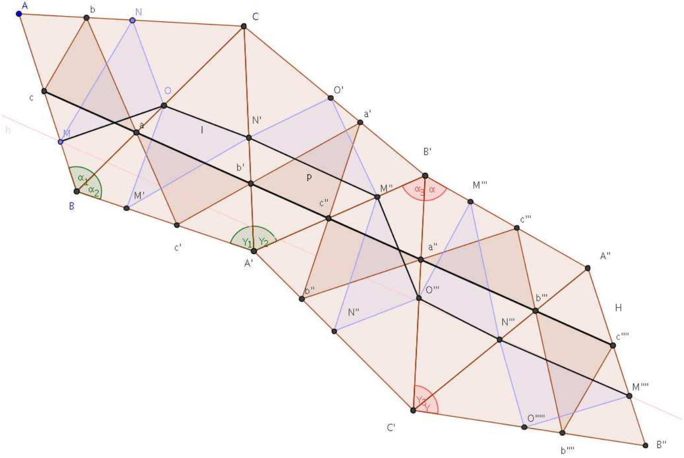
- Une solution est connue si tous les angles du triangle sont aigus (inférieurs à l'angle droit).

4.2. Cas des triangles généraux :

- Une solution est connue si tous les angles du triangle sont aigus (inférieurs à l'angle droit).
- **Exercice** : montrer que dans ce cas, la trajectoire qui passe par les pieds des trois hauteurs donne une trajectoire fermée, appelée orbite de Fagnano



4.2. Cas des triangles généraux : pour Fagnano, une solution passe aussi par du dépliage...

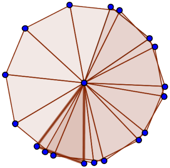


4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

- Si la condition de paver le plan par réflexion n'est pas remplie, les copies par réflexions vont se recouper.

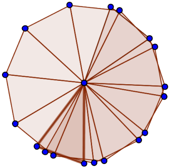
4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

- Si la condition de paver le plan par réflexion n'est pas remplie, les copies par réflexions vont se recouper.



4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

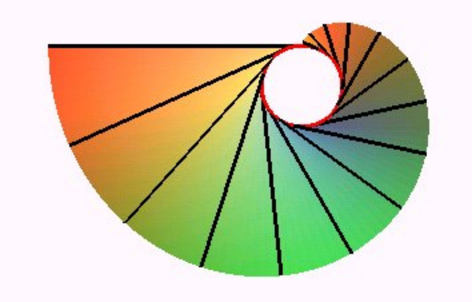
- Si la condition de paver le plan par réflexion n'est pas remplie, les copies par réflexions vont se recouper.



- Mais si les angles du polygone sont de la forme $p/q\pi$, au bout d'un nombre fini de tours, on reviendra au point de départ. On fait cette hypothèse désormais.

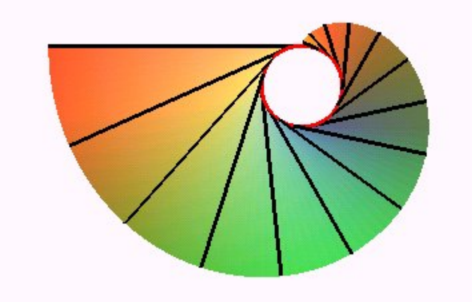
4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

- En “sortant du plan” pour déplier sans chevaucher :



4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

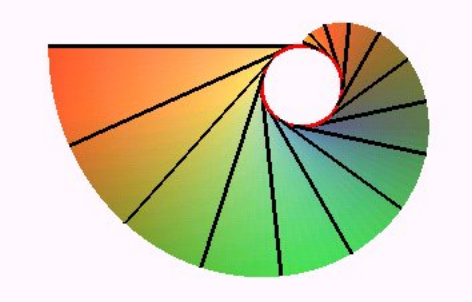
- En “sortant du plan” pour déplier sans chevaucher :



- puis en identifiant les côtés qui se correspondent comme on l’avait fait pour le tore...

4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

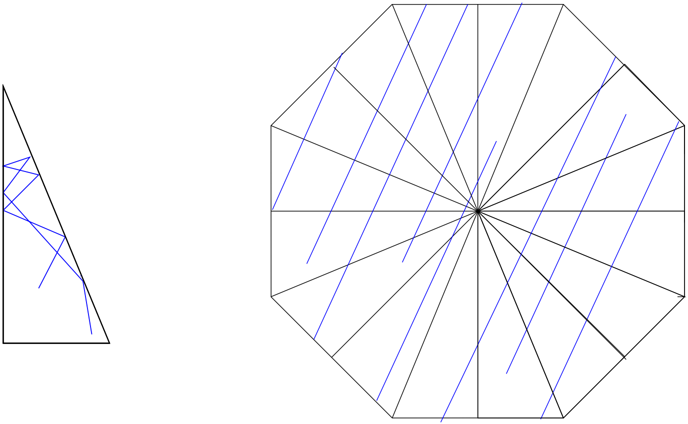
- En “sortant du plan” pour déplier sans chevaucher :



- puis en identifiant les côtés qui se correspondent comme on l'avait fait pour le tore...
- on obtient une surface bizarre.. dans laquelle les boules du billard correspondant vont en ligne droite..

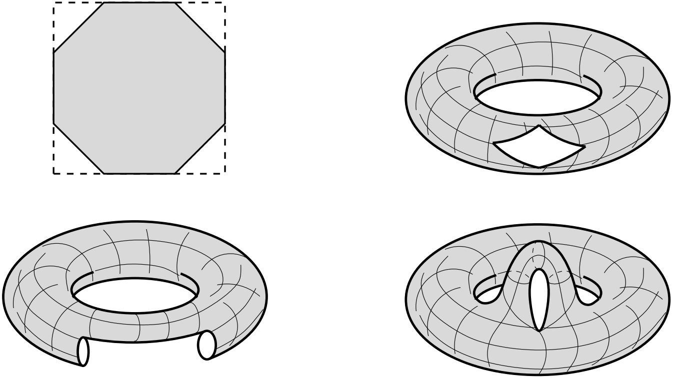
4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

Un exemple plus simple est celui d'un triangle rectangle avec un angle de $\pi/8$. En un tour, on a un octogone pac-man.



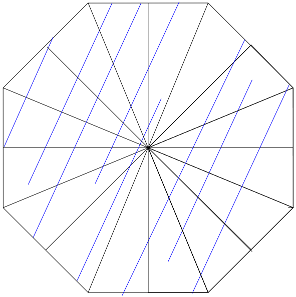
4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

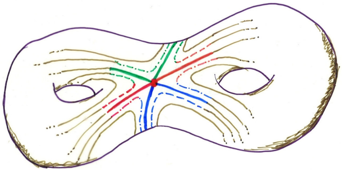
A partir de cet octogone, en identifiant les côtés deux à deux opposés par étapes :



4.3. Et les autres polygones : dépliage encore ?

Les trajectoires sont des *géodésiques* du tore a deux trous obtenu.

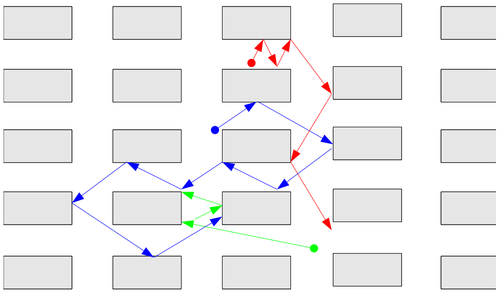




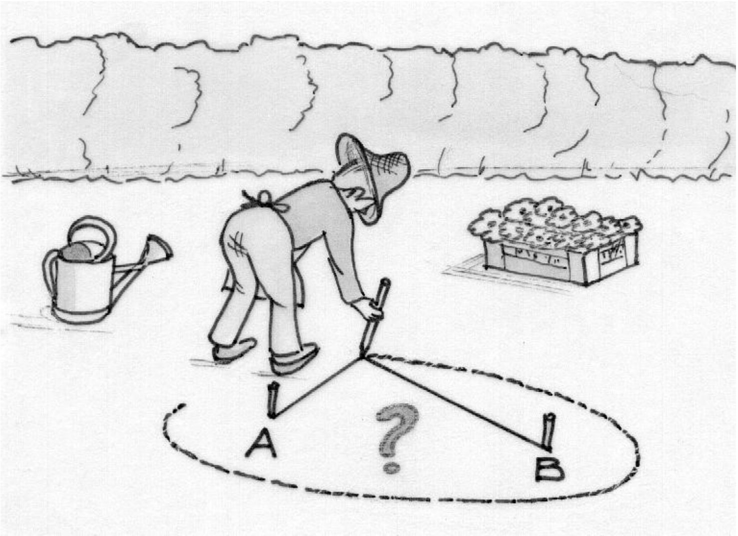
4.4. Applications physiques de billards polygonaux ?

- On remplace la boule de billard par un laser...
- On remplace la boule de billard par une molécule de gaz.. qui en général n'est pas seule. Pour une vitesse constante des molécules, on obtient des résultats sur la distance maximale à un point de départ parcourue en fonction du temps.

Modélisation de la trajectoire d'un électron dans une plaque métallique (modèle d'Ehrenfest)



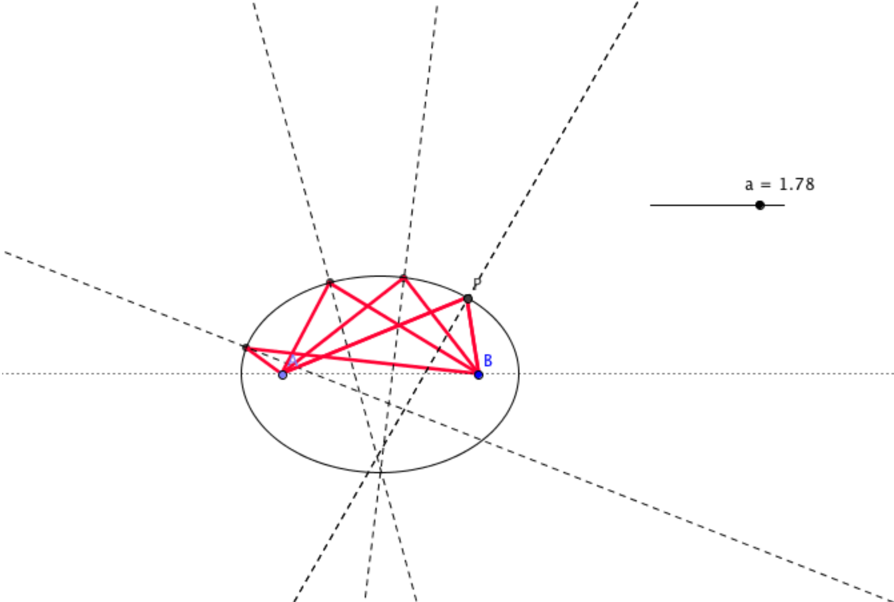
5. Généralisation du billard circulaire : billard elliptique



La construction d'une ellipse : A et B sont les deux foyers. L'ellipse est l'ensemble des points M tels que $MA + MB$ soit constante.

5. Généralisation du billard circulaire : billard elliptique

Propriété des ellipses pour la réflexion : tout rayon issu de *A* qui se réfléchit sur l'ellipse arrive en *B*.



5. Généralisation du billard circulaire : caustiques du billard elliptique

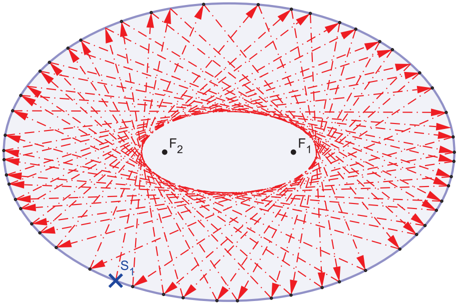
Trois familles de trajectoires de billards dans une ellipse.

1. Celles qui passent par l'un des foyers : on a vu qu'elles rebondissent vers l'autre foyer.

5. Généralisation du billard circulaire : caustiques du billard elliptique

Trois familles de trajectoires de billards dans une ellipse.

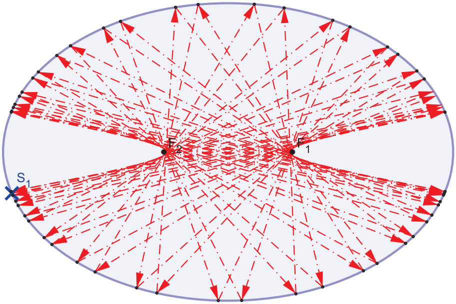
1. Celles qui passent par l'un des foyers : on a vu qu'elles rebondissent vers l'autre foyer.
2. Celles qui coupe l'axe (AB) en dehors du segment $[A, B] = [F_1, F_2]$: qui sont bordées par une petite ellipse (de mêmes foyers)



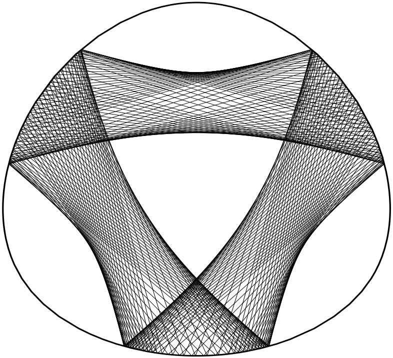
5. Généralisation du billard circulaire : caustiques du billard elliptique

Trois familles de trajectoires de billards dans une ellipse.

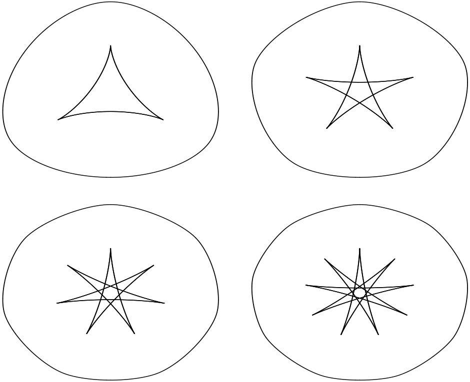
3. Celles qui coupent le segment $[A, B] = [F_1, F_2]$ font apparaître une forme nouvelle : des hyperboles



5. Généralisation du billard circulaire : des ovales qui donnent des caustiques encore plus compliquées

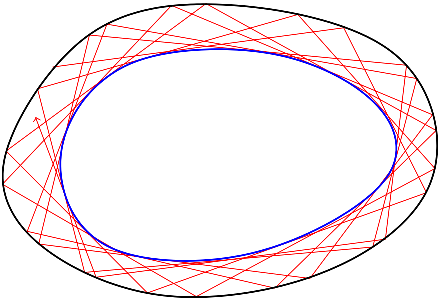


5. Généralisation du billard circulaire : des ovales qui donnent des caustiques encore plus compliquées



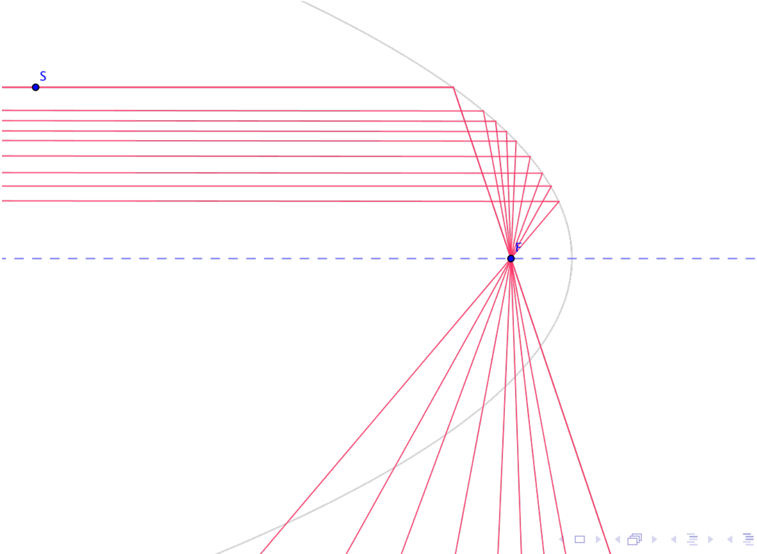
5. Généralisation du billard circulaire : les caustiques des ovales

Théorème (Lazutkin 1974) : un billard strictement convexe lisse (l'inverse des polygones) admet une infinité de caustiques.

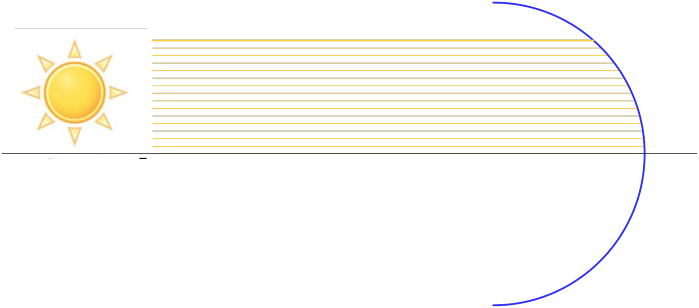


6. Réflexion d’un faisceau et non plus d’un rayon : d’autres caustiques

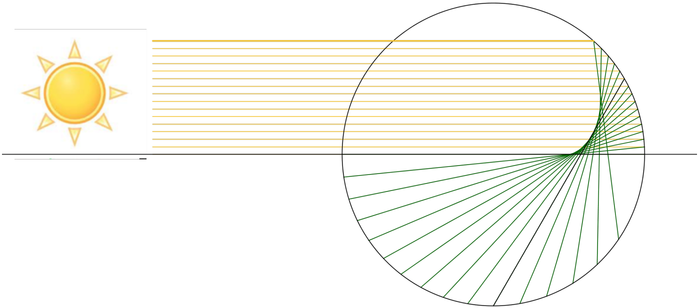
Le miroir idéal pour focaliser : le miroir parabolique (antennes, fours solaires).



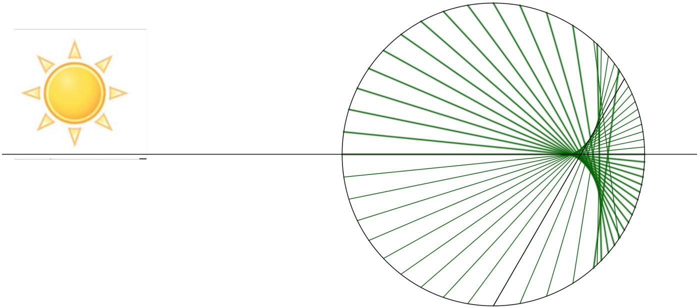
6.2. Le cas du miroir circulaire



6.2. Le cas du miroir circulaire



6.2. Le cas du miroir circulaire



6.2. Le cas du miroir circulaire

6.2 Le miroir circulaire avec deux réflexions

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)
  les trajectoires avec des caustiques à l'intérieur.

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)
  les trajectoires avec des caustiques à l'intérieur.

Chaque situation :

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)
  les trajectoires avec des caustiques à l'intérieur.

Chaque situation :

- est un sujet de recherche actuel en mathématique

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)
  les trajectoires avec des caustiques à l'intérieur.

Chaque situation :

- est un sujet de recherche actuel en mathématique
  et contient bien des questions ouvertes.

7. En guise de conclusion : entre l'anguleux et le lisse.

Nous avons étudié :

- d'un côté des billards polygonaux (anguleux)
  les trajectoires ou bien périodiques ou bien denses ...
- de l'autres des billards ovales (lisses, sans points anguleux)
  les trajectoires avec des caustiques à l'intérieur.

Chaque situation :

- est un sujet de recherche actuel en mathématique
  et contient bien des questions ouvertes.
- est source d'applications physiques variées.

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ...

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ... un peu plus compliqué..

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ... un peu plus compliqué.. voire franchement exotique... mais qu'on comprend finalement !

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ... un peu plus compliqué.. voire franchement exotique... mais qu'on comprend finalement !
- La découverte de courbes pointues (celle de la tasse de café, celle des caustiques de billards) dans un univers lisse est aussi une grande source d'émerveillement :

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ... un peu plus compliqué.. voire franchement exotique... mais qu'on comprend finalement !
- La découverte de courbes pointues (celle de la tasse de café, celle des caustiques de billards) dans un univers lisse est aussi une grande source d'émerveillement :
  ces points particuliers sont souvent ce autour de quoi tout s'organise comme le centre d'un tourbillon.

7. En guise de conclusion : les yeux des mathématiques

- La construction du dépliage des billards polygonaux :
  typique de la façon de penser des mathématiciens :
  transformer une trajectoire compliquée dans un objet simple, en une trajectoire simple dans un objet ... un peu plus compliqué.. voire franchement exotique... mais qu'on comprend finalement !
- La découverte de courbes pointues (celle de la tasse de café, celle des caustiques de billards) dans un univers lisse est aussi une grande source d'émerveillement :
  ces points particuliers sont souvent ce autour de quoi tout s'organise comme le centre d'un tourbillon.

J'espère que ce voyage *à travers les yeux des mathématiciens* vous aura plu
.