DM 15 première partie : Autour du théorème de Cesaro pl. 29

Exercice 1 (Variante sur le théorème de Cesaro)**.** a) Montrer que le théorème de Cesaro s'applique si $l \in \overline{\mathbb{R}}$. (Reprendre la démonstration si $l = \pm\infty$.

b) Lemme de l'escalier : montrer que si $(w_{n+1} - w_n) \to l$ alors $\frac{w_n}{n} \to l$.

c) En déduire que si $u_{n+1}/u_n \to l$ et si (u_n) est à termes positifs, alors $\sqrt[n]{u_n} \to l$.

Solution 1 a) Soit $A > 0$. On sait qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n > A'$ (1) où $A' = 2A + 2$ (*cette valeur de A' est à mettre à la fin !*).

On considère alors pour tout $n \geq n_0$, $M_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n} + \dfrac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n} = A_n + B_n$ (2).

Par (1), on sait que $B_n = \dfrac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n}$ vérifie $B_n \geq A' \dfrac{(n - n_0 + 1)}{n}$ (3).

Or $\dfrac{n - n_0 + 1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc il existe un $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\dfrac{n - n_0 + 1}{n} \geq \dfrac{1}{2}$.

Donc, par (3), pour $n \geq n_1$, $B_n \geq \dfrac{A'}{2} = A + 1$ (4).

D'autre part, comme n_0 est fixé, on sait que $A_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_{n_0-1}}{n}$ vérifie $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc il existe un $n_2 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_2$, on ait $A_n \geq -1$ (5).

En mettant (4) et (5) dans (2), on conclut pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$, on a bien $M_n > A$.

Donc $M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

N.B. *Si $A_n > 0$ p.ex. si $u_n > 0$, on n'a évidemment pas besoin de la partie minoration de A_n par -1. Mais ce qu'on montre ici c'est que même si A_n est négatif, il n'est pas très embêtant.*

b) **Lemme de l'escalier** Il suffit d'appliquer Cesaro (version 1) ou 2) suivant que l est fini ou pas) à la suite $u_n = w_{n+1} - w_n$.

En effet, alors $M_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(w_{k+1} - w_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Or $M_n = \dfrac{1}{n} w_{n+1} - \dfrac{w_1}{n}$.

Donc $\dfrac{w_{n+1}}{n} = M_n + \dfrac{w_1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l + 0 = l$.

Et comme $n + 1 \sim n$, on a $\dfrac{w_{n+1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, ou encore $\dfrac{w_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$. □

c) Si $l > 0$, en prenant le ln, par continuité du ln, on a $\ln(u_{n+1}/u_n) \to \ln(l)$ donc en posant $v_n = \ln(u_n)$, on a $v_{n+1} - v_n \to \ln(l)$.

Par le b), on a alors $\dfrac{v_n}{n} \to \ln(l)$. Autrement dit $\ln(u_n^{1/n}) \to \ln(l)$ et par continuité de l'exp., on conclut que $u_n^{1/n} \to l$.

Si $l = 0$, on obtient par composition des limites, $\ln(u_{n+1}/u_n) \to -\infty$, donc en posant $v_n = \ln(u_n)$, on a $v_{n+1} - v_n \to -\infty$. Mais par a), Cesaro s'applique aussi dans ce cas, donc aussi le lemme de l'escalier, et on a la même conclusion : $u_n^{1/n} \to l$.

Exercice 2 (Test de Cauchy)**.** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ tel que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

a) Montrer que si $l < 1$ alors pour tout $\lambda \in]l, 1[$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\lambda^n)$

b) Si $l > 1$ alors pour tout $\lambda \in]1, l[$ on a $\lambda^n = O(u_n)$.

Solution 2 a) La preuve est analogue à celle de d'Alembert, en même plus simple. Soit $\lambda \in]l, 1[$. Comme $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l < \lambda$, il existe un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \leq \lambda$. Autrement dit $u_n \leq \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$. Autrement dit $u_n = O(\lambda^n)$.

b) De même dans le cas du b), on fixe un $\lambda \in]l, 1[$. On a un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq \lambda^n$ et la conclusion. □

Exercice 3 (Contre-exemple pour la récip. : Cauchy strictement plus fin que d'Alembert)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}{3^n}$. a) Que dire de $\sqrt[n]{a_n}$ quand $n \to +\infty$?

b) Que dire de a_{n+1}/a_n quand $n \to +\infty$?

Solution 3 a) $a_n^{1/n} = \dfrac{1}{3}(2^{\lfloor n/2 \rfloor})^{1/n} = \dfrac{1}{3}\exp(b_n)$ où $b_n = \dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}\ln(2)$.

Or $\lfloor n/2 \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} n/2$ donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)/2$.

Donc $a_n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{3}\exp(\ln(2)/2) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

b) Pour $p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \dfrac{2^p}{3^{2p}}$ et $a_{2p+1} = \dfrac{2^p}{3^{2p+1}}$.

Donc $a_{2p+1}/a_{2p} = 1/3$.

D'autre part $a_{2p+2}/a_{2p+1} = \dfrac{2}{3}$.

Donc la suite (a_{n+1}/a_n) a deux suites extraites ayant des limites différentes, elle diverge.

Exercice 4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$ avec $(l,l') \in \mathbb{R}^2$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{u_0v_n + \ u_1v_{n-1} + \cdots + u_{n-1}v_1 + u_nv_0}{n+1}$.

Etudier la limite de (S_n).

Solution 4 Le plus simple : si on pose $\tilde{u}_n = u_n - l \Leftrightarrow u_n = \tilde{u}_n + l$, on a :

$$S_n = \frac{\tilde{u}_0v_n + \ \tilde{u}_1v_{n-1} + \cdots + \tilde{u}_{n-1}v_1 + \tilde{u}_nv_0}{n+1} + l\,\frac{v_n + \cdots + v_0}{n+1}.$$

Le second terme tend vers ll' par Cesaro usuel.

Montrons que le premier tend vers zéro. On (v_n) CV $\Rightarrow \exists\, M > 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \le M$.

Donc :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\tilde{u}_0v_n + \ \tilde{u}_1v_{n-1} + \cdots + \tilde{u}_{n-1}v_1 + \tilde{u}_nv_0}{n+1}\right| &\le \frac{|\tilde{u}_0||v_n| + \ |\tilde{u}_1||v_{n-1}| + \cdots + |\tilde{u}_{n-1}||v_1| + |\tilde{u}_n||v_0|}{n+1}, \\ &\le M\frac{|\tilde{u}_0| + \cdots + |\tilde{u}_n|}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

par Cesaro usuel applique à $(|\tilde{u}_n|)$.

DM 15 : deuxième partie.
Complément au E2 : étude pratique des suites réelles

IV Exemple de recherche de D.A. de suites déf. implicitement ou par récurrence

1) Pour les suites définies implicitement : méthode de réintroduction successive

a) *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'équation* $\tan(x) = x$ *admet une unique solution* $x_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

Méthode standard : on considère $f(x) = \tan(x) - x$.

On étudie f sur chaque intervalle $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

On a $f'(x) = \tan^2(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en $n\pi \in I_n$, donc f est strictement croissante sur I_n, comme f tend vers $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes, on en déduit par T.V.I. et stricte monotonie, que f admet un unique zéro dans I_n, qui est le x_n cherché.

b) *Donner un équivalent simple de x_n (pas dur !).*

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\pi - \frac{\pi}{2} \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$ les deux membres extrêmes de l'encadrement étant équivalents à $n\pi$, par théorème des gendarmes, on a $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$.

c) *En posant $a_n = x_n - n\pi$, et en remarquant que $a_n = \arctan(x_n)$, obtenir, par réintroduction successive, un D.A. de x_n à la précision $o(\dfrac{1}{n^2})$.*

L'idée de poser $a_n = x_n - n\pi$ est double : avoir un équivalent de a_n c'est déjà avoir un D.A. à deux termes de x_n. D'autre part, $\tan(a_n) = \tan(x_n)$ et $a_n \in]-\pi/2, \pi/2[$, donc en fait $a_n = \mathrm{Arctan}(\tan(x_n)) = \mathrm{Arctan}(x_n)$, puisque, par déf. de x_n, $\tan(x_n) = x_n$.

Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $a_n = \mathrm{Arctan}(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pi/2$.

Donc on a déjà $x_n = n\pi + \pi/2 + o(1)$, D.A. à deux termes.

Mais, mieux, pour savoir comment $a_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$ tend ves $\pi/2$ on peut l'écrire $x_n - n\pi = \mathrm{Arctan}(x_n) = \pi/2 - \mathrm{Arctan}(1/x_n)$.

Là recommence la méthode de réintroduction :

$\mathrm{Arctan}(1/x_n) = \mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi + \pi/2 + o(1)}) = \mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})}) = \mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi}(1 - \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})) = \mathrm{Arctan}(\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) = \dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{1}{2\pi n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ en composant avec le DL d'Arctan.

On conclut qu'on a le D.A. $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{1}{2n^2\pi} + o(\dfrac{1}{n^2})$, et on pourrait continuer !

2) Pour les suites récurrentes (hors points fixes attractifs) à l'aide de Cesaro :

a) **Remarque standard dans les exercices :** *Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est fixé et si u_n positive vérifie $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \to l \neq 0$, alors $u_n^\alpha/n \to l$ i.e. $u_n \sim (n\,l)^{\frac{1}{\alpha}}$.*

Soit $w_n = u_n^\alpha$. On a $w_{n+1} - w_n \to l$ donc par lemme de Cesaro (escalier), on sait que $w_n/n \to l$ et comme $l \neq 0$, on a $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nl$ et donc $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} nl$ et comme α est fixé, on peut prendre la puissance $1/\alpha$ de cet équivalent pour obtenir la conclusion : $u_n \sim (n\,l)^{\frac{1}{\alpha}}$.

b) **Un exemple d'exercice où on nous donne le α :**

soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

(i) *Etudier la limite de (u_n).*

On étudie $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et impaire.

L'étude des variations donne :

On remarquant que les intervalles $[1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$ sont stables et que pour tout $u_0 > 0$, on a $u_1 \in [1, +\infty[$ et pour tout $u_0 < 0$, on a $u_1 \in]-\infty, -1]$.

- Cas $u_0 > 0$. Alors $u_1 \in I = [1, +\infty[$ stable par f donc $(u_n)_{n\geq 1} \in I^{\mathbb{N}^*}$.

En considérant $\varphi(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{x} > 0$ sur I, on voit que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, donc admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (1).
Par composition des limites, si (u_n) convergeait, elle convergerait vers un point fixe de f (car f continue), or f n'a pas de point fixe, donc, vu (1), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

- Cas $u_0 < 0$. On obtient de même que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(ii) *En considérant $u_{n+1}^2 - u_n^2$, obtenir un équivalent simple de u_n pour $n \to +\infty$.*
On considère $u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n + \dfrac{1}{u_n})^2 - u_n^2 = 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ puisqu'on a vu que $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ au (i).
En utilisant le a), on en déduit que $\dfrac{u_n^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, donc que $u_n^2 \sim 2n$.

- Si $u_0 > 0$, on sait que $u_n > 0$ pour tout n et donc $u_n \sim \sqrt{2n}$.
- Si $u_0 < 0$, on sait que $u_n < 0$ pour tout n et donc $u_n \sim -\sqrt{2n}$.

Comparer l'information obtenue ici avec celle obtenue si on avait regardé "seulement" $u_{n+1} - u_n$.
On aurait seulement su que $u_n = o(n)$

c) **Un exemple avec un point fixe à nature indéterminée $|f'(0)| = 1$:**
soit (u_n) définie par $u_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

(i) *Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.* On considère $f : x \mapsto x - x^2$ qu'on étudie sur $[0, 1/2]$.
On a $f'(x) = 1 - 2x$, donc pour $x \in [0, 1/2]$, on a $-2x \in [-1, 0]$ donc $1 - 2x \in [0, 1]$ donc f ets croissante sur $[0, 1/2]$ et $f(0) = 0$ et $f(1/2) = 1/2 - 1/4 = 1/4$.
Donc $[0, 1/2]$ intervalle stable par f, surlequel f est croissante, donc (u_n) est monotone, et $f(u_0) = u_0 - u_0^2 \leq u_0$ donc (u_n) est décroissante minorée par 0 donc converge.
Par continuité de f, et composition des limites, (u_n) ne peut converger que vers un point fixe de f i.e. ici vers 0 seul point fixe.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(ii) *En considérant la suite $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$ trouver un équivalent simple de u_n.* On considère $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u_n - u_n^2} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{u_n}{u_n - u_n^2} = \dfrac{1}{1 - u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc par a), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Soit V un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $f : V \to \mathbb{R}^+$ continue admettant un développement limité de la forme : $f(x) = x - ax^\lambda + x^\lambda \varepsilon(x)$ avec $a > 0, \lambda > 1$ et $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

d) **Comment trouver tout seul le α pour la CV vers un point fixe 0 avec $|f'(0)| = 1$:**
On considère la suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(i) *Montrer que, quitte à restreindre V, on peut supposer que $\forall\, x \in V \setminus \{0\}$, $f(x) < x$* Dans un voisinage de 0^+, on a le D.L. $f(x) - x = -ax^\lambda + o(x^\lambda)$, en particulier, il existe un voisinage de 0^+ de la forme $]0, \alpha[$ sur lequel $f(x) - x$ est strictement négatif (signe de $-ax^\lambda$).

(ii) *En considérant V avec la prop. supplémentaire du a), soit une suite définie par $u_0 \in V$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.*
Montrer que $u_n \to 0$.
La propriété du a) dit que V est stable par f et en outre, $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Donc (u_n) est décroissante minorée par 0 donc converge dans $[0, \alpha]$. En outre l'inégalité du a) dit que tout les points différents de zéro ne sont pas point fixe de f, donc (u_n) converge vers zéro.

(iii) *Chercher* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ *ait une limite finie non nulle pour* $n \to \infty$. On cherche α tel que $f(x)^\alpha - x^\alpha$ ait une limite finie non nulle quand $x \to 0$.

Il est nécessaire que $\alpha \neq 0$ sinon les deux termes sont nuls.

Or $f(x)^\alpha = (x - ax^\lambda + o(x^\lambda))^\alpha = x^\alpha(1 - ax^{\lambda-1} + o(x^{\lambda-1}))^\alpha = x^\alpha(1 - a\alpha x^{\lambda-1} + o(x^{\lambda-1})) = x^\alpha - a\alpha x^{\alpha+\lambda-1} + o(x^{\alpha+\lambda-1})$

Donc $f(x)^\alpha - x^\alpha = -\alpha a x^{\alpha+\lambda-1} + o(x^{\alpha+\lambda-1})$ a une limite finie non non nulle si, et seulement si, $\alpha + \lambda - 1 = 0$.

Donc on doit choisir $\alpha = 1 - \lambda$.

(iv) *En déduire un équivalent de* (u_n) *quand* $n \to \infty$.

Dans ce cas, $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\alpha a = a(\lambda - 1)$.

Et par le lemme de l'escalier (Cesaro) $u_n^\alpha \sim a(\lambda - 1)n$ d'où $u_n \sim (a(\lambda - 1)n)^{1/\alpha} \sim (a(\lambda - 1)n)^{1/(1-\lambda)}$.

(v) *Appliquer ce qui précède à* (u_n) *et* (v_n) *définies par* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$ *et* $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.

Pour $f = \sin$ on a $a = 1/6$ et $\lambda = 3$. Donc $u_n \sim (\frac{1}{3}n)^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Pour $f = \ln(1 + \square)$, on a $a = 1/2$ et $\lambda = 2$, donc $v_n \sim (\frac{1}{2}n)^{-1} \sim \frac{2}{n}$.

Remarque – Cet exercice explique d'où vient l'exposant α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite finie non nulle. En pratique, sauf aux concours (*), on devrait vous donner le α.