D.M. 14 ($\star$) : Sur les valeurs d'adhérence d'une suite réelle

Terminologie – *Pour une suite* (u_n)*, les nombres* $l \in \mathbb{R}$ *tels qu'il existe une suite extraite* $(u_{\varphi(n)})$ *de* (u_n) *qui tend vers* l *s'appellent les* valeurs d'adhérences *de la suite* (u_n).

Par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérences, qui sont 1 et -1.

Par exemple encore, si une suite est dense dans un intervalle I alors I est exactement l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_n).

1) La limite sup. et la limite inf. d'une suite réelle bornée

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^N$ bornée. On peut donc définir pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$ et $w_n = \inf\{u_k, k \geq n\}$.

a) Justifier que (v_n) est convergente. On note l_1 sa limite. On note aussi $l_1 = \overline{\lim}\, u_n$ appelée « limite supérieure » de (u_n).

b) Démonter que l_1 est une valeur d'adhérence de (u_n).

c) Démontrer de même que (w_n) est convergente, et que, si on note l_2 sa limite, alors l_2 est une valeur d'adhérence de (u_n). On note aussi $l_2 = \underline{\lim} u_n$, appelée « limite inférieure » de (u_n).

2) La limite sup. est la plus grande v.a., la limite inf. est la plus petite, conséquences

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \leq u_n \leq v_n$.

b) Démontrer que pour tout valeur d'adhérence l de (u_n), on a $l_2 \leq l \leq l_1$.

c) Une conséquence : démontrer qu'une suite réelle bornée qui admet une unique valeur d'adhérence est convergente.

3) Une application « concrète » du résultat précédent On va montrer l'utilité du résultat montré au 2) c).

Soit $\alpha \in]0,1[$ et (x_n) une suite réelle *bornée* telle que : $x_n + \alpha x_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

a) Montrer que si a est un valeur d'adhérence de (x_n) alors $(1-a)/\alpha$ est aussi une v.a. de (x_n).

b) Montrer alors que (x_n) est convergente, en montrant que (x_n) ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence.

4) Une propriété des suites à croissance lente i.e. telles que $u_{n+1} - u_n \to 0$

Soit (u_n) telle que $u_{n+1} - u_n$ tend vers $l \in \mathbb{R}$.

a) Qu'en déduire sur $\lim u_n$ si $l \neq 0$?

b) Donner un exemple de (u_n) telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ mais (u_n) est divergente.

c)($\star$) Montrer que si $u_{n+1} - u_n \to 0$ et si $a < b$ sont deux valeurs d'adhérences de (u_n) alors pour tout $\lambda \in [a,b]$, il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers λ.

Autrement dit : l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite à croissance lente est un intervalle.

d) Application du résultat du c) : Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ laissant stable l'intervalle $[a,b]$ et $u_0 \in [a,b]$. On définit (u_n) par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Montrer que si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors (u_n) est convergente.

Indication – D'après le c) l'ensemble des v.a. est l'intervalle $[l_2, l_1]$. Montrer qu'ici forcément tous les points de $[l_2, l_1]$ doivent être fixés par f, et en déduire une contradiction si $l_2 < l_1$.